GESAMTBANKSTEUERUNG

GESAMTBANKSTEUERUNG

Vorlesung Gesamtbanksteuerung

Mathematische Grundlagen I

Dr. Klaus Lukas

Carsten Neundorf

Agenda

- Zinsrechnung
- Zinseszins
- Zinskurve
- Forward-Rates
- Zeitwert des Geldes
- Zinsgeschäfte und der zugehörige Cashflow
- Bewertung mit Zerobonds
- Zur Info:Strukturkongruente Refinanzierung
- Rendite
- Deskriptive Statistik

Agenda

GESAMTBANKSTEUERUNG

- Zinsrechnung
- Zinseszins
- Zinskurve
- Forward-Rates
- Zeitwert des Geldes
- Zinsgeschäfte und der zugehörige Cashflow
- Bewertung mit Zerobonds
- Zur Info:Strukturkongruente Refinanzierung
- Rendite
- Deskriptive Statistik

Beispiel einer Anleihe

GESAMTBANKSTEUERUNG

Ausgestaltung einer typischen Anleihe:

Nominalvolumen (K): 10.000.000 EUR

Zinssatz (Z): 4,00%

Zinszahlung: jährlich zum 30.06.

Tagemethode: 30/360

Fälligkeit: 30.06.2015

Der Zinsertrag

Anhand dieses Geschäfts sollen die verschiedenen Begriffe aus der Zinsrechnung eingeführt werden. Der Zinsertrag ZE ergibt sich als

$$ZE = K * Z$$ Z in % bzw. 1/100

$$\Rightarrow \frac{ZE}{K} = Z$$ Für genau 1 Jahr (annuisierter Zins)

Und für unser Beispiel ergibt sich:

$$ZE = 10.000.000 * 4\% = 400.000$$

Das einfache Zinskonzept

In unserem Beispiel war jährliche Zinszahlung vereinbart. Halbjährliche, vierteljährliche oder monatliche Zinszahlungen sind ebenfalls üblich. Wie sieht in diesem Fall die Zinszahlung aus? Der Zinsertrag errechnet sich in diesem Fall nach folgender Formel:

$$ZE = K * Z * \frac{Anlageperiode}{Anzahl\ der\ \ jährlichen\ Perioden}$$

Wäre in unserem Beispiel vierteljährliche Zinszahlung vereinbart worden, so ergäbe sich:

$$ZE = 10.000.000 * 4\% * \frac{1}{4} = 100.000$$

Zinstagemethoden

GESAMTBANKSTEUERUNG

Für den annuisierten Zins ergibt sich:

$$Z = \frac{ZE}{K * Anteil_{Jahr}}$$

Für unser Beispiel ergibt sich:

$$Z = \frac{100.000}{10.000.000 * (1/4)} = \frac{100.000 * 4}{10.000.000} = 4{,}00\%$$

Zinstagemethoden

Wie berechnet sich der Anteil am Gesamtjahr?

Methode	Jahresbasis	Monatsbasis
act/360	360 Tage	28-31 Tage
30/360	360 Tage	30 Tage
act/act	365/366 Tage	28-31 Tage

Zinstagemethoden

Weitere Hinweise:

- Bei der Berechnung der Tage wird der Tag der Auszahlung/ Vereinbarung als 1. Tag gezählt, der Tag der Zinszahlung wird nicht mehr gezählt

- Fallen die Zahlungen auf ein Wochenende, so gibt es ebenfalls Vereinbarungen, wann die Zahlungen dann zu erfolgen haben

Der Zinsertrag

GESAMTBANKSTEUERUNG

Möchte man den Zinsertrag einer Anlage über eine bestimmte Periode berechnen, so ergibt sich der Gesamtbetrag als Summe der Teilerträge:

$$ZE_{Gesamt} = \sum_{i=1}^{n} ZE_i$$

Agenda

- Zinsrechnung
- Zinseszins
- Zinskurve
- Forward-Rates
- Zeitwert des Geldes
- Zinsgeschäfte und der zugehörige Cashflow
- Bewertung mit Zerobonds
- Zur Info:Strukturkongruente Refinanzierung
- Rendite
- Deskriptive Statistik

GESAMTBANKSTEUERUNG

Die Zinseszinsrechnung

Bis jetzt haben wir nur untersucht, wie sich Zinsen und Zinserträge bei einer Anlage für eine Periode verhalten.

Im nächsten Schritt gehen wir davon aus, dass die Investition nicht nur für ein, sondern für zwei Jahre getätigt wird. Weiterhin wird der Zinsertrag ebenfalls zu den vereinbarten Konditionen angelegt.

Die Zinseszinsrechnung

$$1.\mathit{Jahr}: K = 1.000.000 * \frac{5}{100} + 1.000.000 = 1.050.000$$

$$2.\mathit{Jahr}: K = 1.050.000 * \frac{5}{100} + 1.050.000 = 1.102.500$$

Es ergibt sich über die gesamte Laufzeit ein Zinsertrag in Höhe von 102.500 EUR.

Verallgemeinert man das Beispiel auf n Jahre, so erhält man folgende Formel für den Zinsertrag:

$$ZE = K * \left(1 + \frac{Z}{100}\right)^n - K$$

Die Zinseszinsrechnung

GESAMTBANKSTEUERUNG

Dieser Zinseszinseffekt trifft immer auf, wenn die Zinsberechnungsperiode kürzer als die Anlageperiode ist.

Dies ist auch der Fall, wenn die Zinszahlung unterjährig erfolgt und die Anlageperiode mehrere Zinszahlungsperioden umfasst.

Wenn man all diese Parameter berücksichtigen will, so erhält man folgende Formel:

$$ZE = K * \prod_{i=1}^{m} \left(1 + \frac{Z_i}{100} * Jahresanteil_i \right) - K$$

Zinseszins – Ein Beispiel

GESAMTBANKSTEUERUNG

Was bedeutet nun diese Formel und wie rechnet man damit? Auch das sieht man am besten an einem Beispiel:

Es werden 1.000.000 EUR für 2 Jahre investiert und es werden 4 Zinszahlungen vereinbart, nach 1/3 Jahr, nach 2/3 Jahr nach 1 Jahr und 2 Jahren. Für die ersten drei Perioden wird ein Zinssatz von 3% vereinbart, für die letzte ein Zinssatz von 5%. Welcher Zinsertrag steht dem Investor am Ende der Laufzeit unter Berücksichtigung aller Zinseszinseffekte zur Verfügung?

Zinseszins – Ein Beispiel

GESAMTBANKSTEUERUNG

Wir haben vier Zinszahlungen vereinbart, also ist in der Formel m=4 zu setzen.

Jahresanteil_1, Jahresanteil_2, und Jahresanteil_3 sind jeweils 1/3 und Jahresanteil_4 ist 1.

Als Letztes fehlen uns noch die Z_i um die Formel komplett befüllen zu können.
Für i=1,2,3 ist Z_i 3% und Z_4 ist 5%.

Zinseszins – Ein Beispiel

GESAMTBANKSTEUERUNG

$$ZE = 1.000.000 * \left(\underbrace{\left(1 + \frac{3}{100} * \frac{1}{3}\right)}_{i=1} * \underbrace{\left(1 + \frac{3}{100} * \frac{1}{3}\right)}_{i=2} * \underbrace{\left(1 + \frac{3}{100} * \frac{1}{3}\right)}_{i=3} * \underbrace{\left(1 + \frac{5}{100} * \frac{1}{1}\right)}_{i=4} \right) - 1.000.000$$

$$\begin{aligned} ZE &= 1.000.000 * 1{,}08181605 - 1.000.000 \\ &= 1.081.816{,}05 - 1.000.000 \\ &= 81.816{,}05 \end{aligned}$$

Die stetige Verzinsung

GESAMTBANKSTEUERUNG

Als nächstes untersuchen wir einen Spezialfall der Zinseszinsrechnung. Was passiert, wenn wir genau ein Jahr betrachten und dieses in jeweils gleichgroße Abschnitte unterteilen und den Zinssatz konstant lassen?

Betrachten wir nochmals die Formel zur Zinseszinsberechnung:

$$ZE = K * \prod_{i=1}^{m} \left(1 + \frac{Z_i}{100} * Jahresanteil_i \right) - K$$

Die stetige Verzinsung

GESAMTBANKSTEUERUNG

Durch die Annahme von konstanten Zinsen Z und gleichlangen Anteilen eines Jahres m ergibt sich folgende Vereinfachung:

$$ZE = K * \left(1 + \frac{Z}{100} * \frac{1}{m}\right)^m - K$$

Werden die Perioden immer kürzer, dann muss m immer größer werden. Dies kann man beliebig fortsetzen, so dass m gegen unendlich geht (Schreibweise: $\lim_{m \to \infty}$). Es ergibt sich folgende Formel:

$$ZE + K = \lim_{m \to \infty} K * \left(1 + \frac{Z}{m * 100}\right)^m = K * \left(e^1\right)^{Z/100} = K * e^{Z/100}$$

Die stetige Verzinsung

Welche Vorteile hat die stetige Verzinsung?

Einer der Vorteile ist, dass man sich keine Gedanken über die Zinskapitalisierung machen muss, da quasi jederzeit kapitalisiert wird.

Anwendung in wissenschaftlichen Untersuchungen und im Pricing von Derivaten

Der Zinssatz für die stetige Verzinsung muß berechnet werden aus dem Zinseszinssatz:

$$z_{stetig} = \ln(1 + z_{Zinseszins} * Anteil_{Jahr})$$

Agenda

GESAMTBANKSTEUERUNG

- Zinsrechnung
- Zinseszins
- Zinskurve
- Forward-Rates
- Zeitwert des Geldes
- Zinsgeschäfte und der zugehörige Cashflow
- Bewertung mit Zerobonds
- Zur Info:Strukturkongruente Refinanzierung
- Rendite
- Deskriptive Statistik

Die Zinskurve und ihre Informationen

GESAMTBANKSTEUERUNG

Unter einer Zinskurve sie Aufstellung der Zinssätze für verschiedene Laufzeiten innerhalb eines Marktes.

Tabellarisch:

Laufzeit	Zinssatz
1T	0,1%
1M	0,2%
3M	0,3%
…	
12M	0,8%
2J	1,0%
…	
10J	4,0%
15J	4,2%

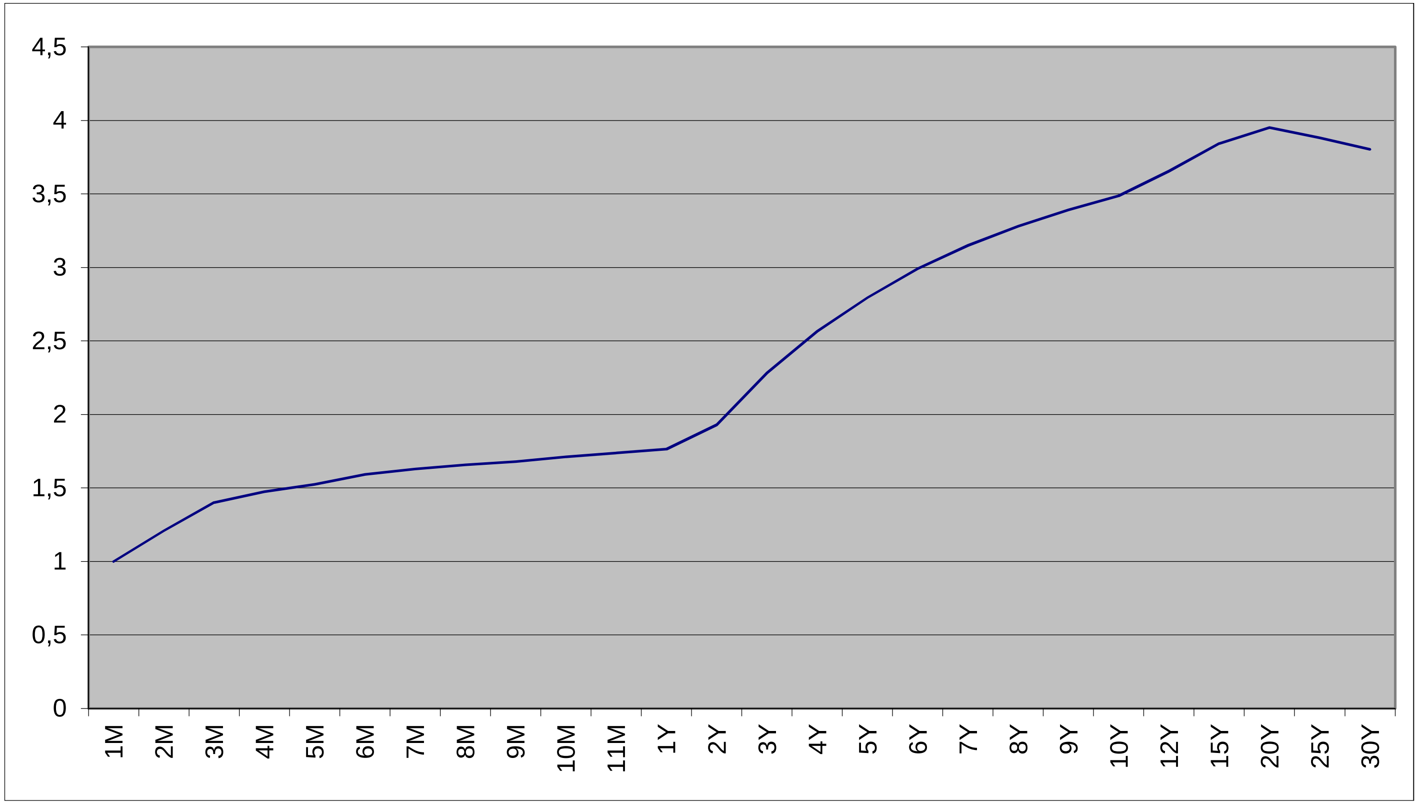
Geldmarkt

Kapitalmarkt

Die Zinskurve und ihre Informationen

GESAMTBANKSTEUERUNG

Unter einer Zinskurve versteht man die graphische Darstellung von Zinssätzen für verschiedene Laufzeiten.



Die Zinskurve und ihre Informationen

GESAMTBANKSTEUERUNG

Wie kommen die Zinskurven zu Stande?

1. Abfrage/ Meldung verschiedener Institute
   Beispiele: Swapkurve, LIBOR, EURIBOR, Geldmarkt
2. Beobachtete Renditen an der Börse / Handel
   Bundesanleihen, Pfandbriefe

Die den Zinssätzen zugrundeliegenden Instrumente müssen dabei identische Tagesbasis und Kredit-/ Liquiditätsrisiken haben

Agenda

GESAMTBANKSTEUERUNG

- Zinsrechnung
- Zinseszins
- Zinskurve
- Forward-Rates
- Zeitwert des Geldes
- Zinsgeschäfte und der zugehörige Cashflow
- Bewertung mit Zerobonds
- Zur Info:Strukturkongruente Refinanzierung
- Rendite
- Deskriptive Statistik

Die Zinskurve und ihre Informationen

Wir haben somit eine Darstellung, wie der Markt die Zinssätze im Moment handelt.
Aber die Zinskurve enthält darüber hinaus auch noch Informationen über zukünftige Zinssätze. Die derart abgeleiteten Zinssätze werden Forwards genannt.
Wie diese ermittelt werden untersuchen wir im folgenden anhand eines Beispiels:
Wir betrachten einen Investor, der Geld für 4 Jahre anlegen will. Als Möglichkeiten stehen ihm zur Verfügung:

1. Anlage für 4 Jahre zu 5,15%
2. Anlage für 3 Jahre zu 4,65%, kombiniert mit einer Geldanlage für das verbleibende Jahr zu X%

Die Zinskurve und ihre Informationen

GESAMTBANKSTEUERUNG

GESAMTBANKSTEUERUNG

Wie hoch muss der Zins X sein, damit beide Anlagen den gleichen Ertrag bringen?

$$K*\left(1+\frac{5,15}{100}\right)^4 = K*\left(1+\frac{4,65}{100}\right)^3 * \left(1+\frac{X}{100}\right)^{(4-3)}$$

Löst man die Gleichung nach X auf, so ergibt sich:

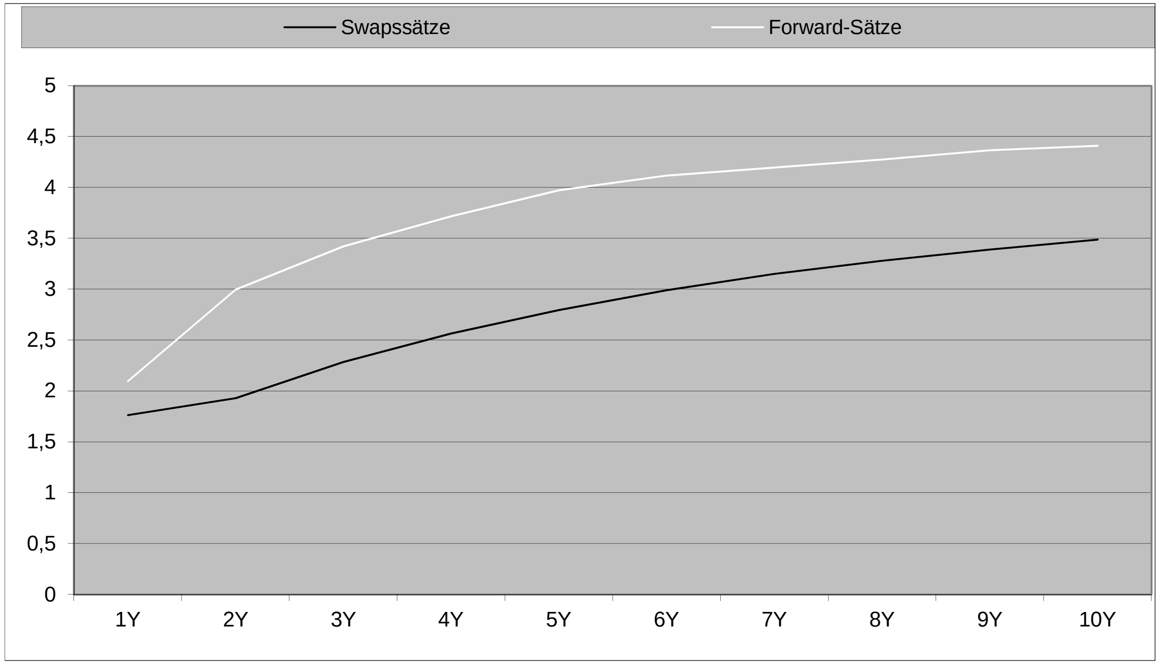
$$\frac{X}{100} = \sqrt[4-3]{\frac{\left(1+\frac{5,15}{100}\right)^4}{\left(1+\frac{4,65}{100}\right)^3}} - 1 = 0,06667 \approx 6,67\%$$

In diesem Fall beträgt der Forwardsatz in 3 Jahren für 1 Jahr also 6,67%.

Die Zinskurve und ihre Informationen

Die Gleichung lässt sich wie folgt verallgemeinern:

$$\frac{Z_{i,j}}{100} = \sqrt[n_j - n_i]{\frac{\left(1+\frac{Z_j}{100}\right)^{n_j}}{\left(1+\frac{Z_i}{100}\right)^{n_i}}} - 1$$



Die Zinskurve und ihre Informationen

GESAMTBANKSTEUERUNG

GESAMTBANKSTEUERUNG

n_j= Gesamtende von heute aus gesehen
n_i= Vorlauf, Anfang der Betrachtung
n_j-n_i=Laufzeit des gesuchten Zinses

Beispiel: Wir möchten wissen, wie der 3J-Zinssatz in 4 Jahren aussieht:
n_j= 3J+4J
n_i= 4J
n_j-n_i=3J

Die Zinskurve und ihre Informationen

GESAMTBANKSTEUERUNG

Beispiel: Wir möchten wissen, wie die Zinskurve in 4 Jahren aussieht:

n_j= 4J+1J für 1J-Zinssatz, 4J+2J für 2J-Zinssatz,…

n_i= 4J

n_j-n_i= 1J für 1J-Zinssatz, 2J für 2J-Zinssatz,…

Beispiel: Wir möchten wissen, wie der 3J-Zinssatz in den nächsten 5 Jahren aussieht:

n_j= 3J+1J für den Zinssatz in 1Jahr,
3J+2J für den Zinssatz in 2Jahren,…

n_i= 1J für den Zinssatz in 1Jahr,
2J für den Zinssatz in 2Jahren,…

n_j-n_i=3J

Die Zinskurve und ihre Informationen

Verwendungszwecke:

- Hilfemittel für Entscheidung, wie Fristigkeiten gesteuert werden
- Instrument zur Preisbestimmung von Derivaten
- Handelbares Instrument (Derivat) als Spekulations- oder Sicherungsgeschäft
- Als Kassageschäft, z.B. als Forward-Darlehen

Agenda

GESAMTBANKSTEUERUNG

- Zinsrechnung
- Zinseszins
- Zinskurve
- Forward-Rates
- Zeitwert des Geldes
- Zinsgeschäfte und der zugehörige Cashflow
- Bewertung mit Zerobonds
- Zur Info:Strukturkongruente Refinanzierung
- Rendite
- Deskriptive Statistik

Der Zeitwert des Geldes

Wie kann man die Vorteilhaftigkeit verschiedener Investitionen vergleichen?

Zahlungen zu verschiedenen Zeitpunkten können nicht direkt miteinander verglichen werden. Der Wert der Zahlungen muss für einen gemeinsamen Zeitpunkt berechnet werden.

Im Rahmen der Zinsrechnung haben wir berechnet, welche Zahlung wir nach n Jahren erhalten, wenn wir heute einen gewissen Betrag investieren.

Wir können die Fragestellung aber auch so formulieren, dass wir überlegen, welchen Wert z.B. 1.000 EUR, die wir in n Jahren haben, heute hätte.

Der Zeitwert des Geldes

GESAMTBANKSTEUERUNG

Noch einmal die Formel für die Zinseszinsrechnung:

$$\underbrace{K + ZE}_{FV_n} = \underbrace{K}_{PV} * \left(1 + \frac{Z}{100}\right)^n$$

Lösen wir die Formel nach PV auf, so erhalten wir:

$$PV = FV_n * \frac{1}{\left(1 + \frac{Z}{100}\right)^n}$$

Wollen wir in zwei Jahren 1.000 EUR erhalten und haben einen Zinssatz von 5% vereinbart, wieviel müssten wir heute investieren?

$$PV = FV_2 * \frac{1}{\left(1 + \frac{5}{100}\right)^2} = 1.000 * \frac{1}{1{,}1025} = 907{,}03\ EUR$$

Der Zeitwert des Geldes

GESAMTBANKSTEUERUNG

Will man den Wert für eine unterjährige Zahlung ermitteln, geht man ebenso vor. Man überlegt, welchen Betrag wir heute anlegen müssen, um am Ende den gewünschten Betrag zu erhalten. Es ergibt sich folgende Formel:

$$PV = FV * \frac{1}{\left(1 + \frac{Z}{100} * Jahresanteil\right)}$$

Der Wert PV wird auch Barwert der Zahlung genannt, der Bruch als Diskontierungsfaktor DF_n.

Agenda

GESAMTBANKSTEUERUNG

- Zinsrechnung
- Zinseszins
- Zinskurve
- Forward-Rates
- Zeitwert des Geldes
- Zinsgeschäfte und der zugehörige Cashflow
- Bewertung mit Zerobonds
- Zur Info:Strukturkongruente Refinanzierung
- Rendite
- Deskriptive Statistik

Cashflows

Kommen wir zurück zu unserer Beispielanleihe. Hier nochmals die Daten:

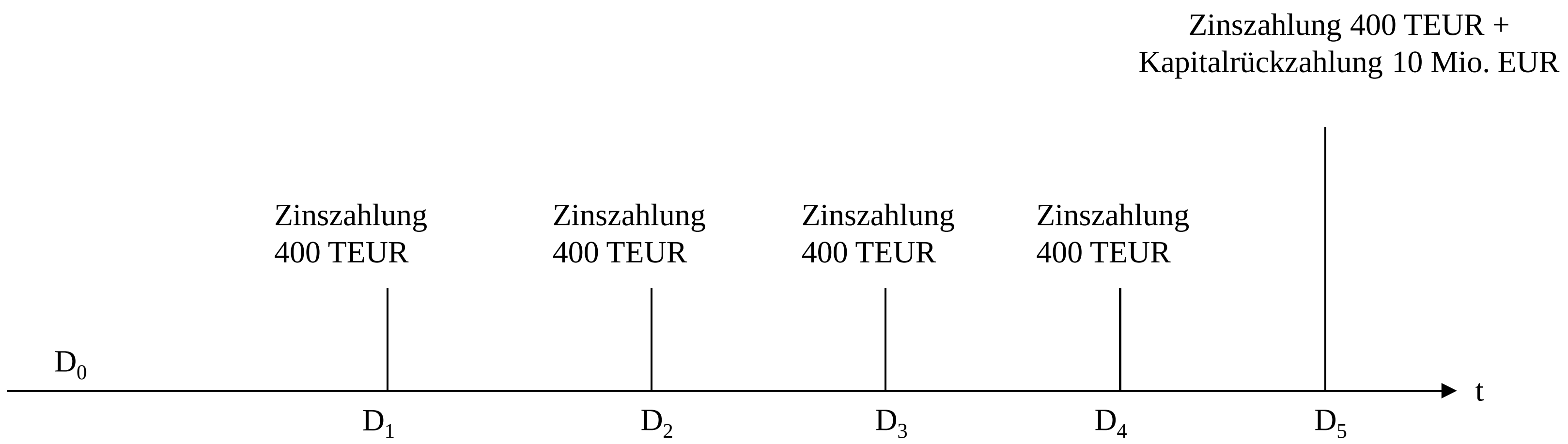
Nominalvolumen (K): 10.000.000 EUR
Zinssatz (Z): 4,00%
Zinszahlung: jährlich zum 30.06.
Tagemethode: 30/360
Fälligkeit: 30.06.2015

Welche Zahlungen erwarten wir?

Cashflows

30.06.2011 Zinszahlung 400.000 EUR
30.06.2012 Zinszahlung 400.000 EUR
30.06.2013 Zinszahlung 400.000 EUR
30.06.2014 Zinszahlung 400.000 EUR
30.06.2015 Zinszahlung 400.000 EUR
30.06.2015 Tilgung 10.000.000 EUR

Zahlungsströme



Agenda

GESAMTBANKSTEUERUNG

GESAMTBANKSTEUERUNG

- Zinsrechnung
- Zinseszins
- Zinskurve
- Forward-Rates
- Zeitwert des Geldes
- Zinsgeschäfte und der zugehörige Cashflow
- Bewertung mit Zerobonds
- Zur Info:Strukturkongruente Refinanzierung
- Rendite
- Deskriptive Statistik

Der Barwert eines Zahlungsstroms

Der Discountfaktor berechnet sich wie folgt:

$$DF_n = \frac{1 - Z_n * \sum_{i=1}^{n-1} DF_i}{1 + Z_n}$$

Der zugehörige Zerobondzinssatz berechnet man mit der Formel:

$$Z_{z_n} = \left(\frac{1}{DF_n} \right)^{1/n} - 1$$

Der Barwert eines Zahlungsstroms

GESAMTBANKSTEUERUNG

Für die folgenden Untersuchungen brauchen wir noch die aktuellen Zinssätze für die verschiedenen Laufzeiten: Im Beispiel sein dies:

1 Jahr 4,00%	2 Jahre 4,50%	3 Jahre 5,00%
4 Jahre 5,50%	5 Jahre 6,00%	

Die zugehörigen Zerobondsätze lauten:

1 Jahr 4,00%	2 Jahre 4,5113%	3 Jahre 5,0341%
4 Jahre 5,5719%	5 Jahre 6,1289%	

Barwertberechnung mit Zerosätzen

GESAMTBANKSTEUERUNG

Berechnet man die Kurse für die Zerobonds der verschiedenen Laufzeiten, so kann man anschließend mit deren Hilfe den Kurs des Wertpapiers einfach berechnen.

Aufgrund der Zinsstruktur ergeben sich folgende Kurse für die Zerobonds:
5-Jahre: 74,27%
4-Jahre: 80,50%
3-Jahre: 86,30%
2-Jahre: 91,55%
1-Jahr: 96,15%

Barwertberechnung mit Zerosätzen

Anschließend kann man jeden einzelnen Cashflow mit den entsprechenden Kursen multiplizieren und erhält so den Barwert des Geschäfts

	t(0)	t(1)	t(2)	t(3)	t(4)	t(5)
Zahlungsstrom		400.000 €	400.000 €	400.000 €	400.000 €	10.400.000 €
Zero-Kurs		0,96153846	0,91553184	0,86299665	0,80502021	0,742730916
Barwert		384.615 €	366.213 €	345.199 €	322.008 €	7.724.402 €
Summe	9.142.436 €					

Agenda

GESAMTBANKSTEUERUNG

- Zinsrechnung
- Zinseszins
- Zinskurve
- Forward-Rates
- Zeitwert des Geldes
- Zinsgeschäfte und der zugehörige Cashflow
- Bewertung mit Zerobonds
- Zur Info:Strukturkongruente Refinanzierung
- Rendite
- Deskriptive Statistik

Der Barwert eines Zahlungsstroms

Möchte man bei der Berechnung des Wertes eines Zahlungsstroms zusätzlich noch Geld-/Briefspannen berechnen, so muss man den Wert mit Hilfe der strukturkongruenten Refinanzierung berechnen.

Der Barwert eines Zahlungsstroms

GESAMTBANKSTEUERUNG

Zur Erinnerung nochmals den Zahlungsstrom:

	t(0)	t(1)	t(2)	t(3)	t(4)	t(5)
Zahlungsstrom		400.000 €	400.000 €	400.000 €	400.000 €	10.400.000 €

Bei der strukturkongruenten Refinanzierung, kurz SKR, beginnt man die zeitlich letzte Zahlung in t(5) mit einem Marktgeschäft auf Basis der Zinskurve zu schließen.
Wir berechnen, wieviel Geld heute aufgenommen werden muß, damit am Ende eine Zahlung in Höhe von 104 TEUR erfolgt.
Mit Hilfe unserer Formeln für die Zinsrechnung ergibt sich:

$$X = \frac{10.400.000\ EUR}{(1+6\%)} = \frac{10.400.000\ EUR}{1{,}06} = 9.811.331\ EUR$$

und ein Zinsaufwand von 588.679 EUR. Zusammengefasst mit dem ursprünglichen Cashflow ergibt sich:

Der Barwert eines Zahlungsstroms

GESAMTBANKSTEUERUNG

	t(0)	t(1)	t(2)	t(3)	t(4)	t(5)
Zahlungsstrom		400.000 €	400.000 €	400.000 €	400.000 €	10.400.000 €
Geschäft zu 6,0%	9.811.321 €	-588.679 €	-588.679 €	-588.679 €	-588.679 €	-10.400.000 €
Zwischenergebnis 1	9.811.321 €	-188.679 €	-188.679 €	-188.679 €	-188.679 €	0 €

Nun wird das gleiche Vorgehen für t(4) angewendet: Wir müssen auf eine Zahlung von -188.679 EUR bei einem Zinssatz von 5,5% kommen. Dies gelingt mit einer Anlage von 178.843 EUR.

	t(0)	t(1)	t(2)	t(3)	t(4)	t(5)
Zahlungsstrom		400.000 €	400.000 €	400.000 €	400.000 €	10.400.000 €
Geschäft zu 6,0%	9.811.321 €	-588.679 €	-588.679 €	-588.679 €	-588.679 €	-10.400.000 €
Zwischenergebnis 1	9.811.321 €	-188.679 €	-188.679 €	-188.679 €	-188.679 €	0 €
Geschäft zu 5,5%	-178.843 €	9.836 €	9.836 €	9.836 €	188.679 €	
Zwischenergebnis 2	9.632.478 €	-178.843 €	-178.843 €	-178.843 €	0 €	

Der Barwert eines Zahlungsstroms

GESAMTBANKSTEUERUNG

Vervollständigt man die Vorgehensweise bis t(1), so fallen in t(1) bis t(5) keine Zahlungen mehr an. Was bleibt ist der Betrag in t(0), der den (Bar)Wert des Geschäftes darstellt. Das vollständige Schema für unser Beispiel sieht so aus:

	t(0)	t(1)	t(2)	t(3)	t(4)	t(5)
Zahlungsstrom		400.000 €	400.000 €	400.000 €	400.000 €	10.400.000 €
Geschäft zu 6,0%	9.811.321 €	-588.679 €	-588.679 €	-588.679 €	-588.679 €	-10.400.000 €
Zwischenergebnis 1	9.811.321 €	-188.679 €	-188.679 €	-188.679 €	-188.679 €	0 €
Geschäft zu 5,5%	-178.843 €	9.836 €	9.836 €	9.836 €	188.679 €	
Zwischenergebnis 2	9.632.478 €	-178.843 €	-178.843 €	-178.843 €	0 €	
Geschäft zu 5,0%	-170.327 €	8.516 €	8.516 €	178.843 €		
Zwischenergebnis 3	9.462.151 €	-170.327 €	-170.327 €	0 €		
Geschäft zu 4,5%	-162.992 €	7.335 €	170.327 €			
Zwischenergebnis 4	9.299.159 €	-162.992 €	0 €			
Geschäft zu 4,0%	-156.723 €	162.992 €				
Endergebnis	9.142.436 €	0 €				

Der Barwert des Geschäfts ist also rund 9.142.436 EUR.

Agenda

GESAMTBANKSTEUERUNG

- Zinsrechnung
- Zinseszins
- Zinskurve
- Forward-Rates
- Zeitwert des Geldes
- Zinsgeschäfte und der zugehörige Cashflow
- Bewertung mit Zerobonds
- Zur Info:Strukturkongruente Refinanzierung
- Rendite
- Deskriptive Statistik

Rendite

GESAMTBANKSTEUERUNG

Wie lässt sich der Erfolg eines Geschäfts messen?

P_0 sei der Kurs zum Zeitpunkt t_0, P_1 der Kurs zum Zeitpunkz t_1. A_i bezeichnet die Auszahlungen im Zeitraum zwischen t_0 und t_1 .

1. Als absoluter Ertrag

$$E = P_1 - P_0 + \sum_i A_i$$

2. Diskrete Rendite
   berechnet sich als prozentualer Zuwachs von einem Zeitpunkt zum anderen

$$R = \frac{(P_1 + \sum_i A_i - P_0)}{P_0} = \frac{P_1 + \sum_i A_i}{P_0} - 1$$

Rendite

GESAMTBANKSTEUERUNG

Wie lässt sich der Erfolg eines Geschäfts messen?

3. Stetige Rendite

$$r = \ln \frac{P_1 + \sum_i A_i}{P_0} = \ln\left(P_1 + \sum_i A_i\right) - \ln P_0$$

Ein kleines Beispiel für die Vorteile der stetigen Rendite:
In t_0 beträgt der Kurs 100, in t_1 140, in t_2 wieder 100.
Bei der diskreten Rendite erhalten wir R_1=40% und R_2=-28,6%, in Summe also +11,4%
Für die stetige Rendite erhalten wir r_1=33,6 und r_2=-33,6 in Summe also 0%.

Agenda

GESAMTBANKSTEUERUNG

- Zinsrechnung
- Zinseszins
- Zinskurve
- Forward-Rates
- Zeitwert des Geldes
- Zinsgeschäfte und der zugehörige Cashflow
- Bewertung mit Zerobonds
- Zur Info:Strukturkongruente Refinanzierung
- Rendite
- Deskriptive Statistik

Die Datenreihen

GESAMTBANKSTEUERUNG

Im Verlaufe der Vorlesung sollen die eingeführten Konzepte jeweils auch auf Echtdaten angewandt werden.

Hierfür betrachten wir folgende Indizes:

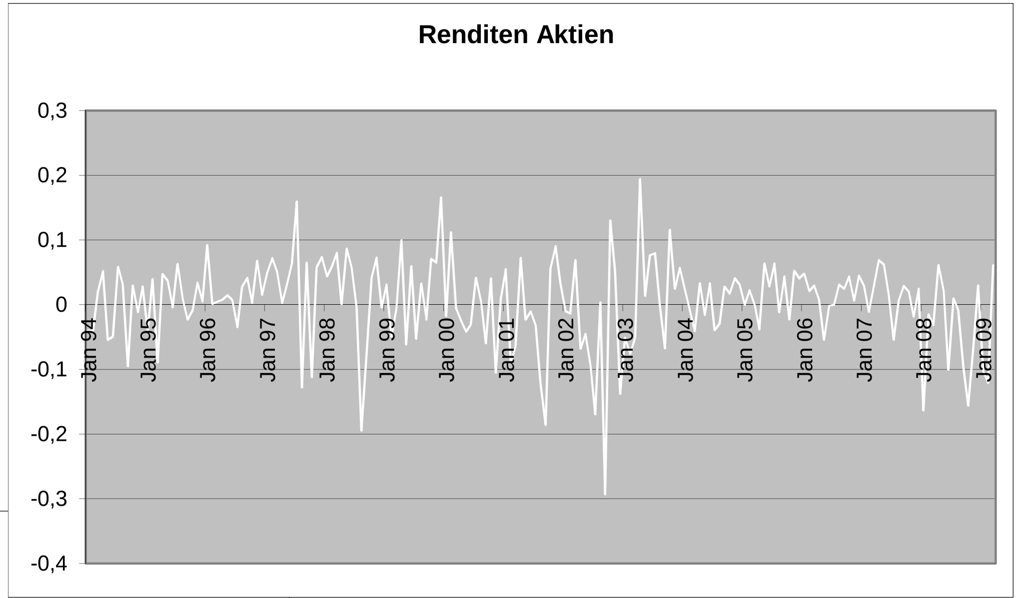
Rentenindex REX
Aktienindex DAX

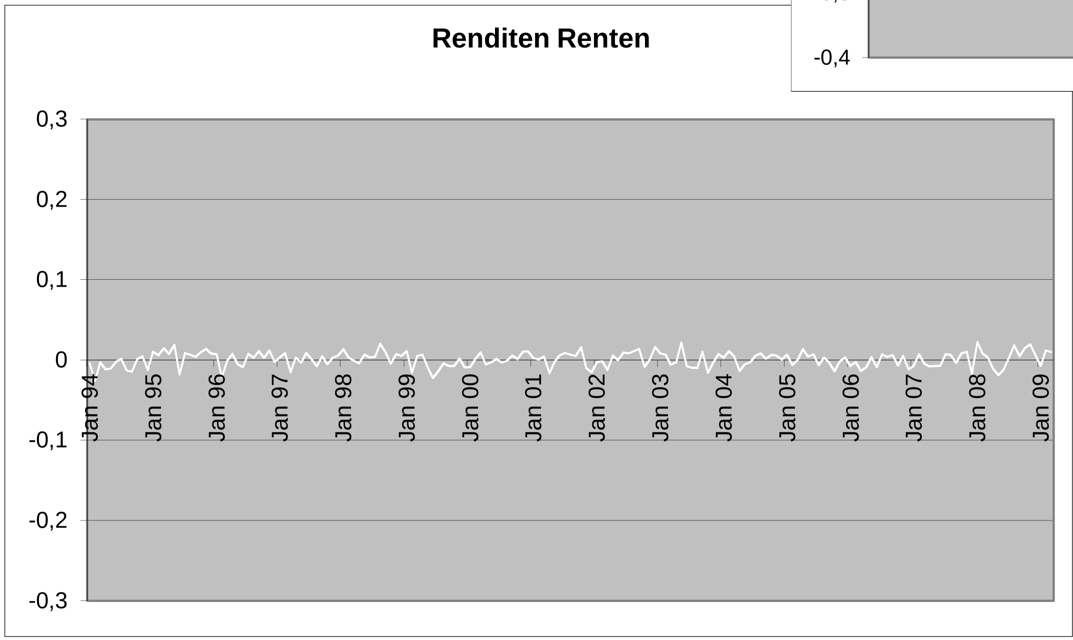
Ziele der deskriptiven Statistik

Die deskriptive Statistik zielt darauf ab, eine unüberschaubare Datenmenge durch möglichst wenige jedoch noch aussagekräftige Zahlen zu charakterisieren. Im Extremfall mittels lediglich einer Zahl.

Als erster Schritt, bevor irgendwelche Kennzahlen berechnet werden, bietet es sich an, die Daten erstmal graphisch darzustellen.

Graphische Zeitreihenanalyse





Grundbegriffe der Statistik

GESAMTBANKSTEUERUNG

- Als *Grundgesamtheit* G wird die Menge aller statistischer Einheiten bezeichnet, über die man Aussagen gewinnen will. Diese muss klar umgrenzt sein.

- An den statistischen Einheiten werden interessante Größen beobachtet, die sogenannten *Merkmale* X.

- Typischerweise wird man nicht alle Einheiten der Grundgesamtheit in die Untersuchung einbeziehen, sondern ein nach bestimmten Kriterien ausgewählte Teilgesamtheit, die sogenannte *Stichprobe* vom Umfang n.

Grundbegriffe der Statistik

GESAMTBANKSTEUERUNG

•Konkrete Werte eines Merkmals für eine bestimmte statistische Einheit wird *Ausprägungen des Merkmales* genannt. Abgekürzt mit x.

•Als absolute bzw. relative Häufigkeit einer Ausprägung a_j,j=1,...,k bezeichnet man die Anzahl bzw. den Anteil von Werten der Stichprobe, die mit a_j übereinstimmt. Die absoluten Häufigkeiten werden mit H_j bezeichnet, die relativen wir mit $h_j=H_j/n$.

•Häufigkeitsfunktion h(x)

$F(x) = \sum_{a_j < x} h_j$ wird als empirische Verteilungsfunktion bezeichnet

Lageparameter

GESAMTBANKSTEUERUNG

Der bekannteste Lageparameter ist der Durchschnittswert oder auch das arithmetische Mittel

$$\overline{x} = \frac{1}{n} * \sum_{i=1}^{n} x_i$$

Da jedem Merkmalswert das Gewicht 1/n zugeordnet wird, kann es vorkommen, dass der Mittelwert mit keinem beobachteten Wert übereinstimmt.

Lageparameter

GESAMTBANKSTEUERUNG

Ein weiterer Lageparameter, der auch in den Beobachtungswerten enthalten ist, ist der Median.

Er ist durch die Eigenschaft definiert, dass mindestens 50% aller Werte kleiner oder gleich sind und mindestens 50% aller Werte auch größer oder gleich sind.

Um den Median zu ermitteln, müssen zuerst alle Ausprägungen der Grösse nach sortiert werden. Anschließend errechnet sich der Median wie folgt:

$$x_{Med} = x_{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 1}$$

Lageparameter

Will man nicht den „mittleren“ Wert haben, sondern den p-größten, so kann man die Formel wie folgt abwandeln:

$$q_p = x_{\lfloor p*n \rfloor + 1}$$

Dies wird das p-Quantil genannt. p ist hierbei immer als %-Zahl anzusehen.

Streuungsparameter

GESAMTBANKSTEUERUNG

Unser Ziel ist es, mit möglichst wenigen Kennzahlen eine große Datenmenge zu beschreiben.

Am Beispiel der Renditeverteilung der Aktien und der Renten sehen wir aber, dass der Mittelwert die Daten nicht ausreichend beschreibt, da er für beide Datenreihen nahezu identisch bei 0,2% liegt, aber die größten und kleinsten Werte der Aktien deutlich mehr von der Mitte abweichen als die Werte der Renten.

Deshalb wird nun ein Maß für die „Streuung“ eingeführt.

Streuungsparameter

GESAMTBANKSTEUERUNG

Ein mögliches Maß für diese Streuung ist die mittlere quadratische Abweichung s^2, auch empirische Varianz bezeichnet. Als Formel ausgedrückt.

$$s^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2$$

Hieraus wird dann die Standardabweichung s abgeleitet, indem aus s^2 die Wurzel gezogen wird.

$$s = \sqrt{s^2} = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2}$$

Variationskoeffizient

GESAMTBANKSTEUERUNG

Führt man die beiden Kennzahlen Standardabweichung und Mittelwert zusammen, so erhält man den sogenannten Variationskoeffizient V.

$$V = \frac{s}{\bar{x}}$$

Beispiel REX