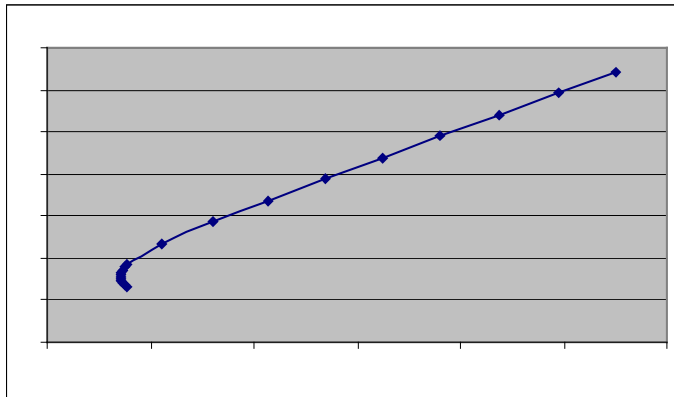


Vorlesung Gesamtbanksteuerung

Mathematische Grundlagen III + IV

Dr. Klaus Lukas

Stefan Prasser



Agenda

- Rendite- und Risikoanalyse eines Portfolios
 - Gesamrendite
 - Kovarianz
 - Korrelationen
- Gesamtrisiko eines Portfolios (Varianz/Kovarianzmodell)
- Historische Simulation
- Monte-Carlo-Simulation
- Vergleich der Modelle
- Risk/Return Diagramm

Agenda

- Rendite- und Risikoanalyse eines Portfolios
 - Gesamrendite
 - Kovarianz
 - Korrelationen
- Gesamtrisiko eines Portfolios (Varianz/Kovarianzmodell)
- Historische Simulation
- Monte-Carlo-Simulation
- Vergleich der Modelle
- Risk/Return Diagramm

Portfoliorendite (I)

Die Rendite eines Portfolios $E(y)$ wird ermittelt als der gewogene Durchschnitt der durchschnittlichen Renditen / der erwarteten Renditen $E(y_i)$. Die Gewichte z_i entsprechen den Anteilen des Gesamtbetrags, die in die einzelnen Anlagealternativen investiert sind.

$$E(y) = \sum z_i * E(y_i), \text{ mit } \sum_{i=1}^n z_i = 1 \text{ und } z_i \geq 0 \text{ f\u00fcr alle } i$$

Portfoliorendite (II)

Beispiel zur Portfoliorendite: (langer Zeitraum)

	Anlage A DAX	Anlage B REX	Anteil A / B
Erwartete Rendite	0,33%	0,07%	
Varianz σ^2	0,4492%	0,0088%	
Standardabweichung σ	6,70%	0,93%	

Welche Portfolio-Rendite ergibt sich, wenn

- 30% in A und 70% in B
- 60% in A und 40 % in B

investiert sind?

Kovarianz (I)

Die Kovarianz kann als Maß des Gleichlaufs zweier Anlagen betrachtet werden. Unter der Kovarianz historischer Renditen versteht man den Durchschnitt der miteinander multiplizierten Abweichungen von der jeweiligen durchschnittlichen Rendite beider Anlagen:

$$COV(A, B) = \frac{1}{n} * \sum_{i=1}^n (y_{Ai} - \bar{y}_A) * (y_{Bi} - \bar{y}_B)$$

y_{Ai} bezeichnet die Rendite der Anlage A in der Periode i,
 \bar{y}_A bezeichnet die durchschnittliche Rendite der Anlage A.

Kovarianz (II)

Gegenläufigkeit von Anlagen, d.h. Anlage A steigt während Anlage B fällt, führt zu negativer Kovarianz, während gleichläufige Anlagen zu einer positiven Kovarianz führen.

Unabhängigkeit der Anlagen, besteht also kein Zusammenhang, führt zu einer Kovarianz von 0.

Problem: Interpretation des Ergebnisses

Lösung: Normierung

Korrelation (I)

Die Korrelation als Maß des Gleichlaufs zweier Renditen wird berechnet, indem die Kovarianz COV durch das Produkt aus den beiden Standardabweichungen σ_A und σ_B dividiert wird:

$$\rho_{AB} = \frac{COV(A, B)}{\sigma_A * \sigma_B}$$

ρ_{AB} wird als Korrelationskoeffizient für die Anlagen A und B bezeichnet.

Korrelation (II)

Durch die Korrelation erfolgt eine Normierung auf den Bereich $[-1;+1]$, so dass eine standardisierte Kennzahlenberechnung auch von mehr als zwei Anlagen durchgeführt werden kann.

Korrelationskoeffizient = 1: vollständige positive Korrelation

Korrelationskoeffizient = -1: vollständige negative Korrelation

Korrelationskoeffizient = 0: unkorrelierte Anlagen

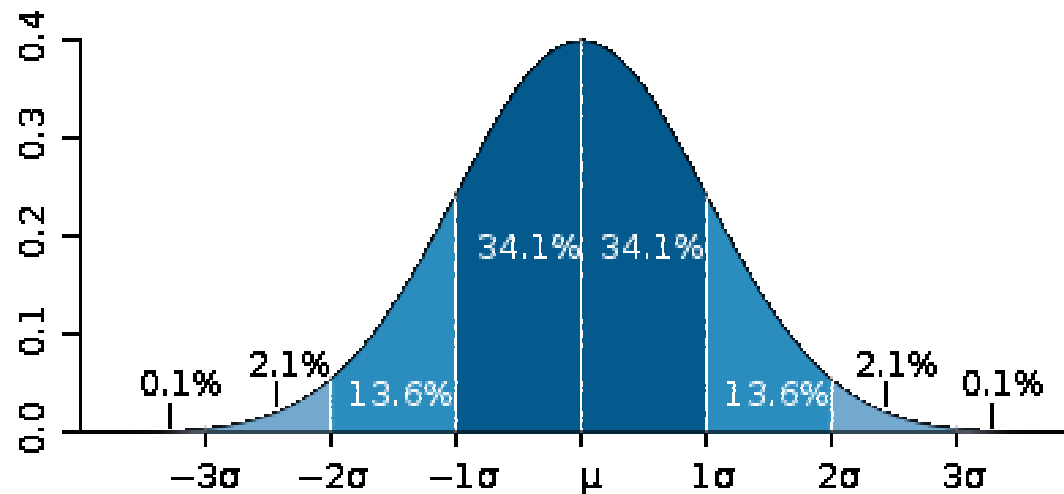
Agenda

- Rendite- und Risikoanalyse eines Portfolios
 - Gesamrendite
 - Kovarianz
 - Korrelationen
- **Gesamtrisiko eines Portfolios (Varianz/Kovarianzmodell)**
- Historische Simulation
- Monte-Carlo-Simulation
- Vergleich der Modelle
- Risk/Return Diagramm

Varianz / Kovarianzmodell (I)

Grundlage des Varianz-Kovarianz-Ansatzes ist explizit eine theoretische Basis:

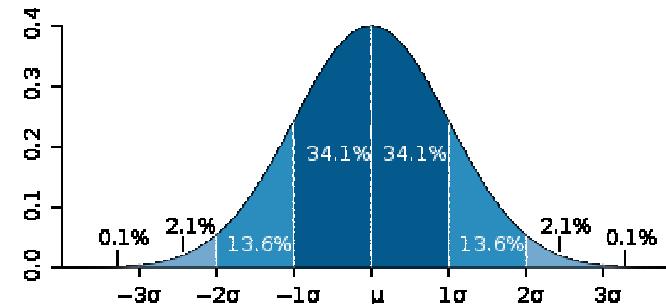
- Annahme einer multivariaten Normalverteilung!



Varianz / Kovarianzmodell (II)

Grundlegende Berechnungsformel für das Portfoliorisiko (**VaR**, value at risk) nach dem Varianz-Kovarianz-Ansatz:

$$\text{VaR} = d * \sigma_P$$



d als Multiplikator der Standardabweichung des Portfolios errechnet sich aus der Standardnormalverteilung N :

$$N(d) = 0,95 \Rightarrow d = 1,645$$

$$N(d) = 0,99 \Rightarrow d = 2,326$$

Varianz / Kovarianzmodell (III)

Am Beispiel des DAX ergibt sich zum Stichtag 31.03.2009:

Aktueller Kurs: 4085

Investitionsvolumen: 10.000 Eur

Standardabweichung: 6,70%

Ermittlung des VaR (95% Wahrscheinlichkeit):

$$N(0,95) * 6,70\% = 1,645 * 6,70\% = 11,02\%$$

$$\text{VaR} = 10.000 \text{ Eur} * 11,02\% = 1.102 \text{ Eur}$$

Varianz / Kovarianzmodell (IV)

Portfolio-Varianz:

Die Portfoliovarianz, aus der sich die Portfoliostandardabweichung und der VaR ableiten, setzt sich aus den Kovarianzen, gewichtet mit den jeweiligen Anteilen der Anlagen am Gesamtportfolio, zusammen.

$$\sigma_P^2 = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m z_i * z_j * COV(i, j)$$

Varianz / Kovarianzmodell (V)

Portfolio-Varianz: (kurze Zeitreihe)

Im Beispiel ergibt sich folgende Korrelations-Matrix:

Korr.	DAX	REX
DAX	1	0,24
REX	0,24	1

und die Kovarianzmatrix:

Cov.	DAX	REX
DAX	0,2215%	0,0124%
REX	0,0124%	0,0125%

Varianz / Kovarianzmodell (VI)

Am Beispiel DAX/REX ergibt sich zum Stichtag 31.03.2009 bei je hälftigem Portfolioanteil: (lange Zeitreihe)

$$\begin{aligned}\sigma_{PF}^2 &= 1/4 * 44,92 + 1/4 * (-1,61) + 1/4 * (-1,61) + 1/4 * 0,88 \\ &= 10,65\end{aligned}$$

Daraus ergibt sich als Standardabweichung

$$\sigma_{PF} = 3,26\%$$

und bei einem Investitionsvolumen von 10.000 Eur (p=95%):

$$\text{VaR}_{PF} = 10.000 \text{ Eur} * 3,26\% * 1,645 = 536,67 \text{ Eur}$$

Dies ist kleiner als die Summe der Einzelrisiken:

$$5.000 \text{ Eur} * 6,70\% * 1,645 + 5.000 \text{ Eur} * 0,93\% * 1,645 = 628,14 \text{ Eur}$$

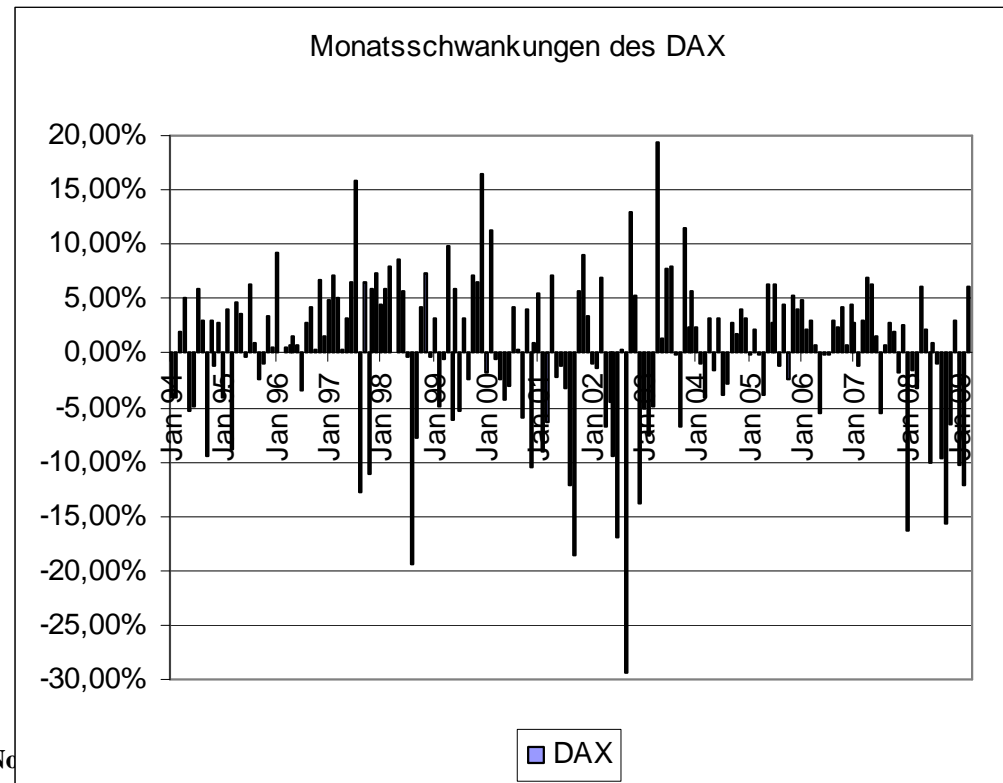
$$536,67 < 628,14 \quad \rightarrow \text{Diversifikationseffekt}$$

Agenda

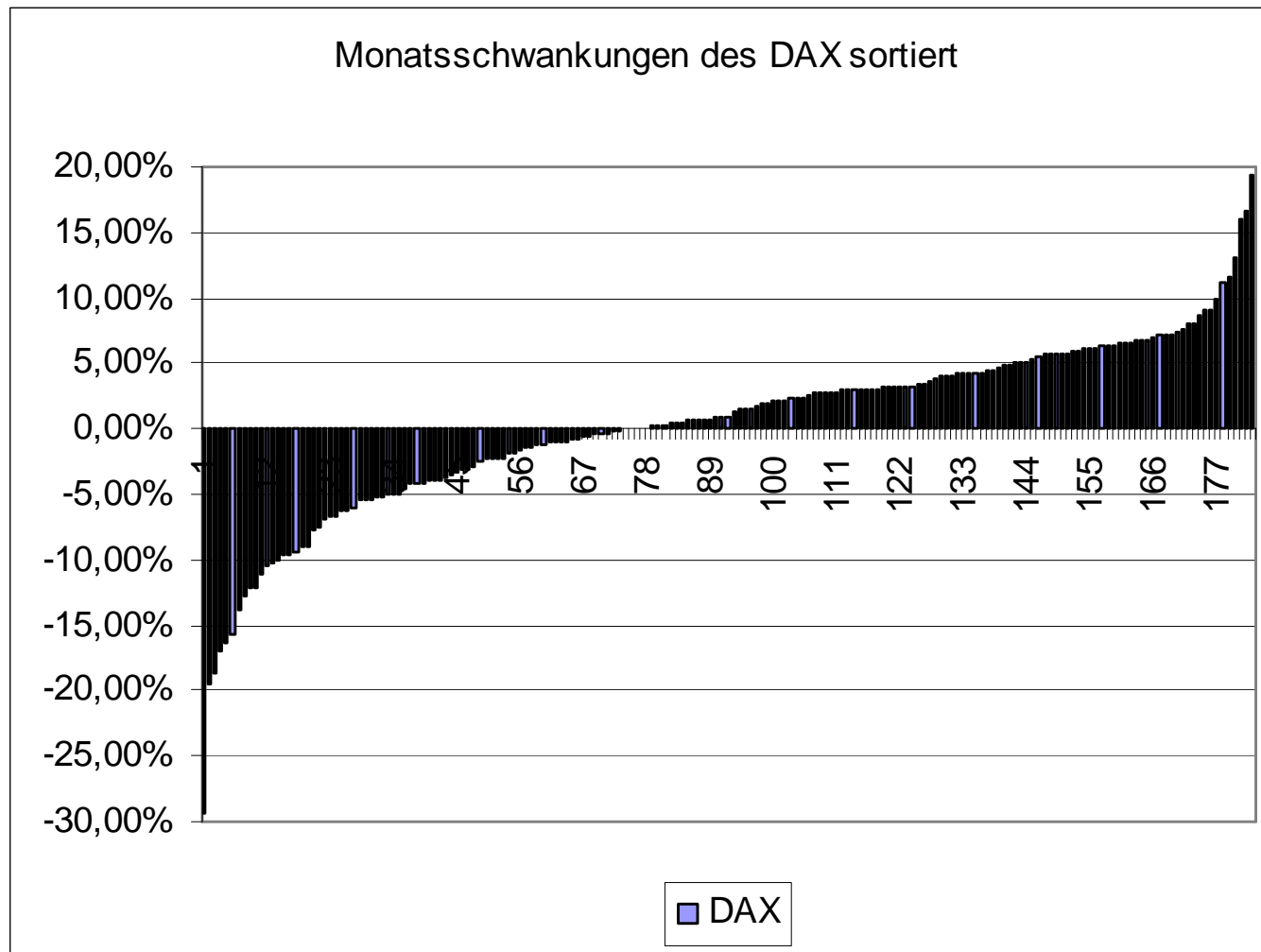
- Rendite- und Risikoanalyse eines Portfolios
 - Gesamrendite
 - Kovarianz
 - Korrelationen
- Gesamtrisiko eines Portfolios (Varianz/Kovarianzmodell)
- **Historische Simulation**
- Monte-Carlo-Simulation
- Vergleich der Modelle
- Risk/Return Diagramm

Historische Simulation (I)

Bei der historischen Simulation werden zur Berechnung des Risikos die historischen Ereignisse sortiert, um dann durch Abzählen festzustellen, welcher Verlust bei gegebener Wahrscheinlichkeit in der Vergangenheit nicht überschritten wurde.



Historische Simulation (II)



Historische Simulation (III)

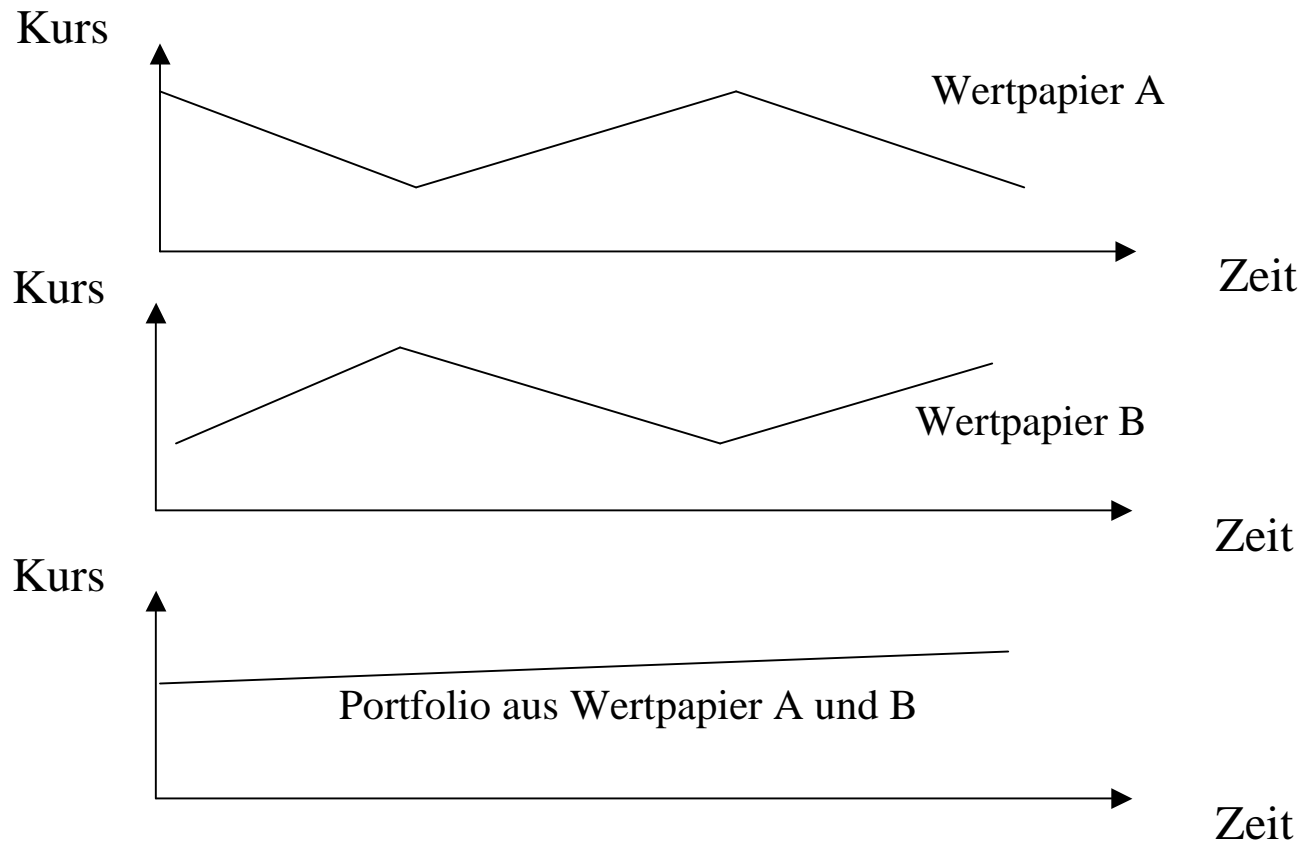
Konfidenzniveau und kritische Monatsschwankungen beim DAX.

Insgesamt liegen 183 Schwankungen vor (31.12.1993 bis 31.03.2009)

		Nr.	Datum	DAX
		1	30.09.2002	-29,33%
99%	=>	2	31.08.1998	-19,49%
		3	30.09.2001	-18,59%
		4	31.07.2002	-16,93%
		5	31.01.2008	-16,33%
		6	31.10.2008	-15,62%
		7	31.12.2002	-13,79%
		8	31.08.1997	-12,79%
		9	31.08.2001	-12,20%
95%	=>	10	28.02.2009	-12,10%
		11	31.10.1997	-11,19%
		12	30.11.2000	-10,49%
		13	31.01.2009	-10,32%
		14	30.06.2008	-10,05%
		15	30.09.2008	-9,66%
		16	30.09.1994	-9,53%
		17	30.06.2002	-9,48%
		18	28.02.2001	-9,03%
90%	=>	19	31.03.1995	-8,93%
		20	30.09.1998	-7,73%

Historische Simulation (IV)

Idealtypischer Diversifikationseffekt:



Historische Simulation (V)

Diversifikationseffekt:

Anlage: 5.000 Eur DAX-Portfolio

5.000 Eur REX-Portfolio

	Kurswert	VaR (p=95%)
DAX	5.000	605
REX	5.000	77
Portfolio		682

Ermittlung des VaR für jede Position gesondert!

Historische Simulation (VI)

Diversifikationseffekte werden automatisch in die VaR-berechnung integriert:

1. Ermittlung der hist. Portfoliorenditen
2. Ermittlung des Portfolio-VaR

	Kurswert	VaR (p=95%)
DAX	5.000	
REX	5.000	
Portfolio		576

Ermittlung des VaR für das Gesamtportfolio!

Agenda

- Rendite- und Risikoanalyse eines Portfolios
 - Gesamrendite
 - Kovarianz
 - Korrelationen
- Gesamtrisiko eines Portfolios (Varianz/Kovarianzmodell)
- Historische Simulation
- **Monte-Carlo-Simulation**
- Vergleich der Modelle
- Risk/Return Diagramm

Monte-Carlo-Simulation (I)

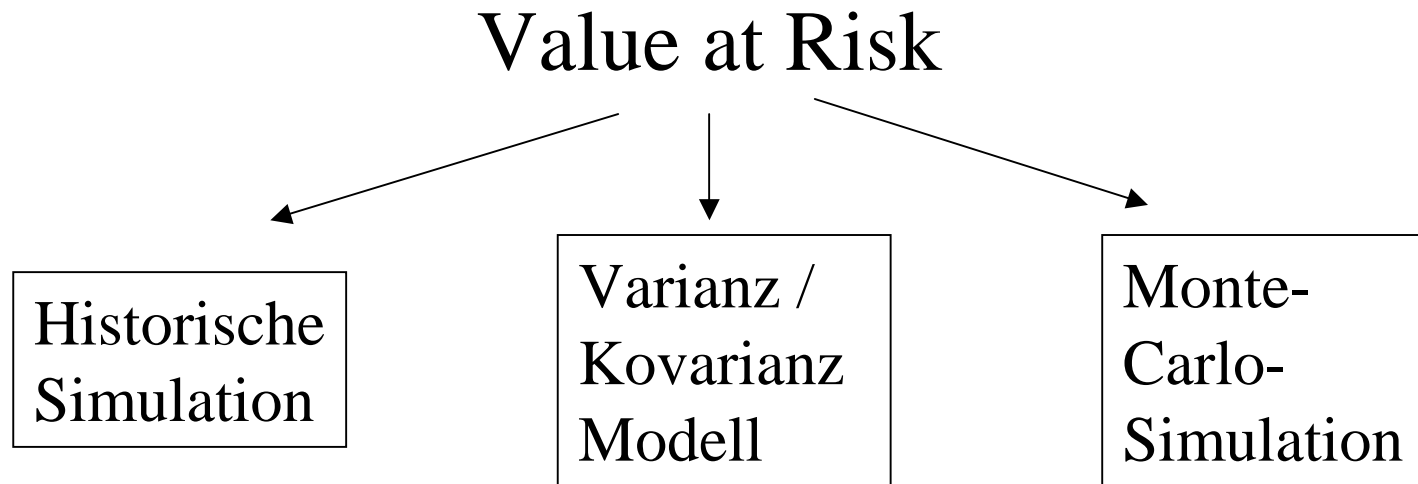
Grundzüge der Monte-Carlo-Simulation:

1. Der Portfoliowert wird als Funktion der Werte der Marktfaktoren ausgedrückt (Zins, Aktienkurs, Devisenkurs)
2. Für die Marktfaktoren werden Verteilungen angenommen und deren Parameter bestimmt.
3. Mit einem Zufallsgenerator werden aus den Verteilungen sehr viele Realisationen möglicher Werte der Marktfaktoren gezogen.
4. Die gezogenen Marktfaktoren werden auf das Portfolio angewandt.
5. Wie bei der historischen Simulation werden die so erzeugten neuen Portfoliowerte sortiert und der VaR an der 1%- oder 5%-Grenze abgelesen.

Agenda

- Rendite- und Risikoanalyse eines Portfolios
 - Gesamrendite
 - Kovarianz
 - Korrelationen
- Gesamtrisiko eines Portfolios (Varianz/Kovarianzmodell)
- Historische Simulation
- Monte-Carlo-Simulation
- Vergleich der Modelle
- Risk/Return Diagramm

Value at Risk - Ansätze



- Value at Risk – Konzepte (VaR-Konzepte) bestimmen den maximalen Verlust eines Portfolios, der während eines bestimmten Zeitraums (Haltedauer) bei einer vorgegebenen Wahrscheinlichkeit (Konfidenzniveau) nicht überschritten wird.

Vergleich der Modelle

	Vorteile	Nachteile
Varianz-Kovarianz-Ansatz	<ul style="list-style-type: none"> -Explizite Berücksichtigung der Korrelation -„geringer“ Berechnungsaufwand bei Kenntnis der Parameter -Weit verbreitete Methode 	<ul style="list-style-type: none"> -Normalverteilungsannahme -Für nichtlineare Risiken nicht verwendbar (z.B. Optionen)
Historische Simulation	<ul style="list-style-type: none"> -Für alle Marktpreisrisiken geeignet -Implizite Berücksichtigung von Korrelationen -Integration sämtlicher Risikoarten möglich 	<ul style="list-style-type: none"> -Vergangenheit als einziger Maßstab -Keine Transparenz der Korrelationen -Rel. hoher Berechnungsaufwand bei großen Portfolien
Monte-Carlo-Simulation	<ul style="list-style-type: none"> -Statistisch „saubere“ Lösung -Für alle Marktpreisrisiken einsetzbar -Integration sämtlicher Risiken möglich 	<ul style="list-style-type: none"> -Sehr komplexes Modell -Hoher Rechenaufwand erforderlich -Annahme der Wahrscheinlichkeitsverteilung für Risikoparameter

Agenda

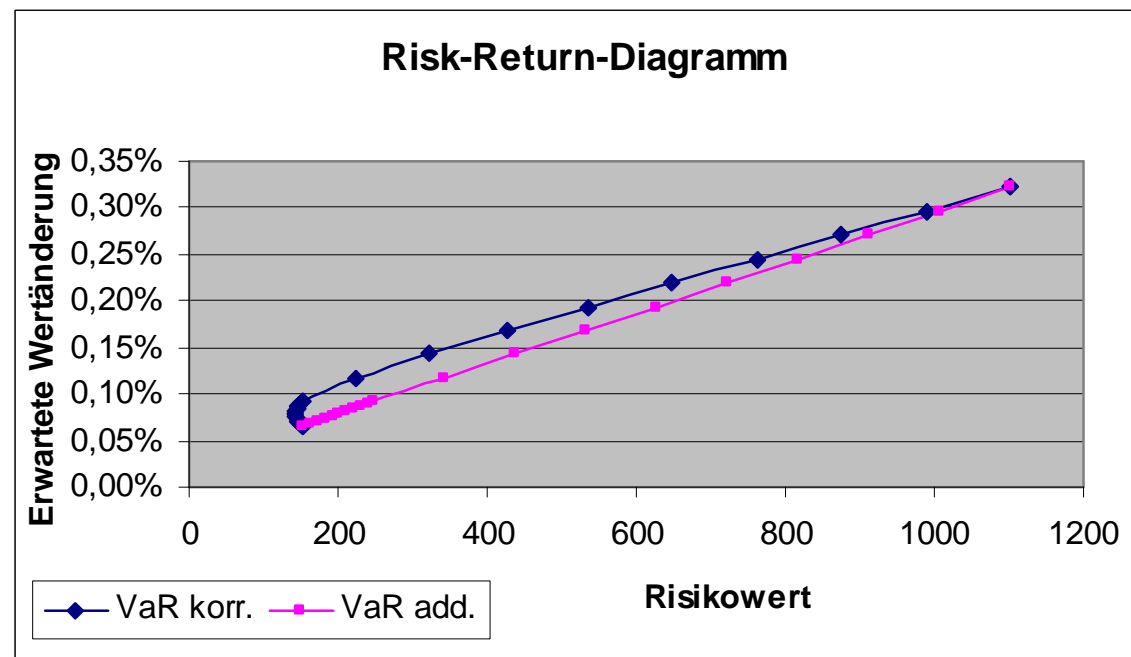
- Rendite- und Risikoanalyse eines Portfolios
 - Gesamrendite
 - Kovarianz
 - Korrelationen
- Gesamtrisiko eines Portfolios (Varianz/Kovarianzmodell)
- Historische Simulation
- Monte-Carlo-Simulation
- Vergleich der Modelle
- **Risk/Return Diagramm**

Risk/Return-Diagramm (I)

Beispiel auf der Basis des Varianz-Kovarianz-Ansatzes

- $p = 95\%$

- Portfolio besteht aus Investition in DAX und REX



Risk/Return-Diagramm (II)

Mischungsverhältnis		Gesamtrendite	VaR korr.	VaR add.
DAX	REX			
0%	100%	0,07%	153,86	153,86
1%	99%	0,07%	149,88	163,35
2%	98%	0,07%	146,69	172,83
3%	97%	0,07%	144,36	182,32
4%	96%	0,08%	142,92	191,81
5%	95%	0,08%	142,39	201,29
6%	94%	0,08%	142,80	210,78
7%	93%	0,08%	144,13	220,26
8%	92%	0,09%	146,35	229,75
9%	91%	0,09%	149,43	239,23
10%	90%	0,09%	153,32	248,72
20%	80%	0,12%	223,29	343,57
30%	70%	0,14%	320,51	438,43
40%	60%	0,17%	426,75	533,28
50%	50%	0,19%	536,67	628,14
60%	40%	0,22%	648,41	722,99
70%	30%	0,25%	761,17	817,85
80%	20%	0,27%	874,55	912,70
90%	10%	0,30%	988,34	1007,56
100%	0%	0,32%	1102,41	1102,41

Risk/Return-Diagramm (III)

Man erkennt, dass bei gleicher erwarteter Wertänderung das Risiko bei Beachtung von Abhängigkeiten zwischen den Anlagealternativen niedriger aufgezeigt wird als bei reiner Addition.

Darauf aufbauend begründete Markovitz die Moderne Portfolio-Theorie.

Ziel: Ermittlung eines Risikomaßes, mit dem die in einem Portfolio-Verbund auftretenden Diversifikationseffekte, also der Nutzen der Streuung auf verschiedene Märkte, Regionen oder Anlageformen, messbar gemacht werden.

Im Beispiel: Jede Investitionszusammensetzung zwischen 5% Dax / 95% REX und 100% DAX / 0% REX ist günstig, eine Quote von weniger als 5% DAX ist unter Risk/Return-Gesichtspunkten unvorteilhaft: es gibt eine Investitionszusammensetzung, die bei gleichem Risiko eine höhere Ertragserwartung hat.