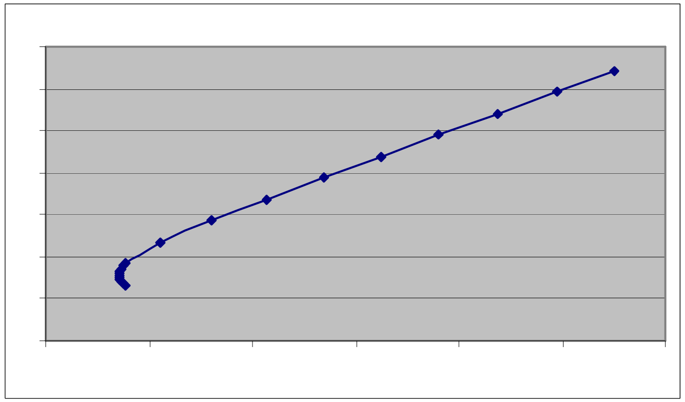
GESAMTBANKSTEUERUNG

Vorlesung Gesamtbanksteuerung

Mathematische Grundlagen III / Marktpreisrisiken

Dr. Klaus Lukas

Stefan Prasser



Agenda

GESAMTBANKSTEUERUNG

- Rendite- und Risikoanalyse eines Portfolios
  - Gesamtrendite
  - Kovarianz
  - Korrelationen
- Gesamtrisiko eines Portofolios (Varianz/Kovarianzmodell)
- Historische Simulation
- Monte-Carlo-Simulation
- Vergleich der Modelle
- Risk/Return Diagramm

Agenda

GESAMTBANKSTEUERUNG

- Rendite- und Risikoanalyse eines Portfolios
  - Gesamtrendite
  - Kovarianz
  - Korrelationen
- Gesamtrisiko eines Portofolios (Varianz/Kovarianzmodell)
- Historische Simulation
- Monte-Carlo-Simulation
- Vergleich der Modelle
- Risk/Return Diagramm

Portfoliorendite (I)

Die Rendite eines Portfolios *E(y)* wird ermittelt als der gewogene Durchschnitt der durchschnittlichen Renditen / der erwarteten Renditen $E(y_i)$. Die Gewichte z_i entsprechen den Anteilen des Gesamtbetrags, die in die einzelnen Anlagealternativen investiert sind.

$$E(y) = \sum z_i * E(y_i), \text{ mit } \sum_{i=1}^{n} z_i = 1 \text{ und } z_i \geq 0 \text{ für alle } i$$

Portfoliorendite (II)

GESAMTBANKSTEUERUNG

Beispiel zur Portfoliorendite: (langer Zeitraum)

	Anlage A DAX	Anlage B REX	Anteil A / B
Erwartete Rendite	0,33%	0,07%	
Varianz σ^2	0,4492%	0,0088%	
Standardabweichung σ	6,70%	0,93%	

Welche Portfolio-Rendite ergibt sich, wenn

- 30% in A und 70% in B
- 60% in A und 40 % in B

investiert sind?

Kovarianz (I)

Die Kovarianz kann als Maß des Gleichlaufs zweier Anlagen betrachtet werden. Unter der Kovarianz historischer Renditen versteht man den Durchschnitt der miteinander multiplizierten Abweichungen von der jeweiligen durchschnittlichen Rendite beider Anlagen:

$$COV(A,B) = \frac{1}{n} * \sum_{i=1}^{n} (y_{Ai} - \bar{y}_A) * (y_{Bi} - \bar{y}_B)$$

y_{Ai} bezeichnet die Rendite der Anlage A in der Periode i,

$\bar{y}_A$ bezeichnet die durchschnittliche Rendite der Anlage A.

Kovarianz (II)

GESAMTBANKSTEUERUNG

Gegenläufigkeit von Anlagen, d.h. Anlage A steigt während Anlage B fällt, führt zu negativer Kovarianz, während gleichläufige Anlagen zu einer positiven Kovarianz führen.

Unabhängigkeit der Anlagen, besteht also kein Zusammenhang, führt zu einer Kovarianz von 0.

Problem: Interpretation des Ergebnisses

Lösung: Normierung

Korrelation (I)

Die Korrelation als Maß des Gleichlaufs zweier Renditen wird berechnet, indem die Kovarinz COV durch das Produkt aus den beiden Standardabweichungen σ_A und σ_B dividiert wird:

$$\rho_{AB} = \frac{COV(A,B)}{\sigma_A * \sigma_B}$$

ρ_{AB} wird als Korrelationskoeffizient für die Anlagen A und B bezeichnet.

Korrelation (II)

GESAMTBANKSTEUERUNG

Durch die Korrelation erfolgt eine Normierung auf den Bereich [-1;+1], so dass eine standardisierte Kennzahlenberechnung auch von mehr als zwei Anlagen durchgeführt werden kann.

Korrelationskoeffizient = 1: vollständige positive Korrelation

Korrelationskoeffizient = -1: vollständige negative Korrelation

Korrelationskoeffizient = 0: unkorrelierte Anlagen

Agenda

GESAMTBANKSTEUERUNG

GESAMTBANKSTEUERUNG

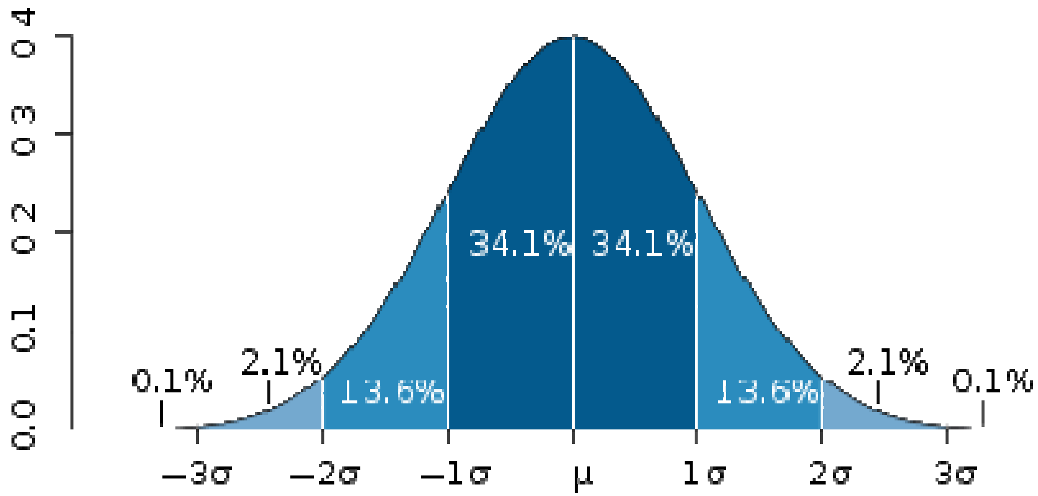
- Rendite- und Risikoanalyse eines Portfolios
  - Gesamtrendite
  - Kovarianz
  - Korrelationen
- Gesamtrisiko eines Portofolios (Varianz/Kovarianzmodell)
- Historische Simulation
- Monte-Carlo-Simulation
- Vergleich der Modelle
- Risk/Return Diagramm

Varianz / Kovarianzmodell (I)

GESAMTBANKSTEUERUNG

Grundlage des Varianz-Kovarianz-Ansatzes ist explizit eine theoretische Basis:

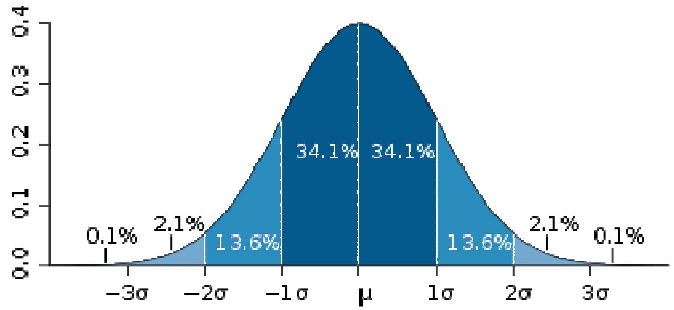
- Annahme einer multivariaten Normalverteilung!



Varianz / Kovarianzmodell (II)

Grundlegende Berechnungsformel für das Portfoliorisiko (**VaR**, value at risk) nach dem Varianz-Kovarianz-Ansatz:

$$VaR = d * \sigma_P$$



d als Multiplikator der Standardabweichung des Portfolios errechnet sich aus der Standardnormalverteilung N:

$$N(d) = 0{,}95 \quad => \quad d = 1{,}645$$

$$N(d) = 0{,}99 \quad => \quad d = 2{,}326$$

Varianz / Kovarianzmodell (III)

GESAMTBANKSTEUERUNG

Am Beispiel des DAX ergibt sich zum Stichtag 31.03.2009:

Aktueller Kurs: 4085

Investitionsvolumen: 10.000 Eur

Standardabweichung: 6,70%

Ermittlung des VaR (95% Wahrscheinlichkeit):

N(0,95) * 6,70% = 1,645 * 6,70% = 11,02%

VaR = 10.000 Eur * 11,02% = 1.102 Eur

Varianz / Kovarianzmodell (IV)

Portfolio-Varianz:

Die Portfoliovarianz, aus der sich die Portfoliostandardabweichung und der VaR ableiten, setzt sich aus den Kovarianzen, gewichtet mit den jeweiligen Anteilen der Anlagen am Gesamtportfolio, zusammen.

$$\sigma_P^{\ 2} = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{m} z_i * z_j * COV(i, j)$$

Varianz / Kovarianzmodell (V)

GESAMTBANKSTEUERUNG

Portfolio-Varianz: (kurze Zeitreihe)

Im Beispiel ergibt sich folgende Korrelations-Matrix:

Korr.	DAX	REX
DAX	1	0,24
REX	0,24	1

und die Kovarianzmatrix:

Cov.	DAX	REX
DAX	0,2215%	0,0124%
REX	0,0124%	0,0125%

Varianz / Kovarianzmodell (VI)

GESAMTBANKSTEUERUNG

Am Beispiel DAX/REX ergibt sich zum Stichtag 31.01.1996 bei einem Portfolioanteil DAX 30% / REX 70%: (kurze Zeitreihe 01/1994 - 01/1996)

$$\sigma^2_{PF} = 0{,}3 * 0{,}3 * 0{,}2215\% + 0{,}3 * 0{,}7 * 0{,}0124\% + 0{,}7 * 0{,}3 * 0{,}0124\% + 0{,}7 * 0{,}7 * 0{,}0125\% = 0{,}0312\%$$

Daraus ergibt sich als Standardabweichung

$\sigma_{PF} = 1{,}77\%$

und bei einem Investitionsvolumen von 10.000 Eur (p=95%):

$VaR_{PF} = 10.000 \text{ Eur} * 1{,}77\% * 1{,}645 = 290{,}69 \text{ Eur}$

Dies ist kleiner als die Summe der Einzelrisiken:

$3.000 \text{ Eur} * 4{,}71\% * 1{,}645 + 7.000 \text{ Eur} * 1{,}12\% * 1{,}645 = 360{,}71 \text{ Eur}$

$290{,}69 < 360{,}71$ ➔ Diversifikationseffekt

Agenda

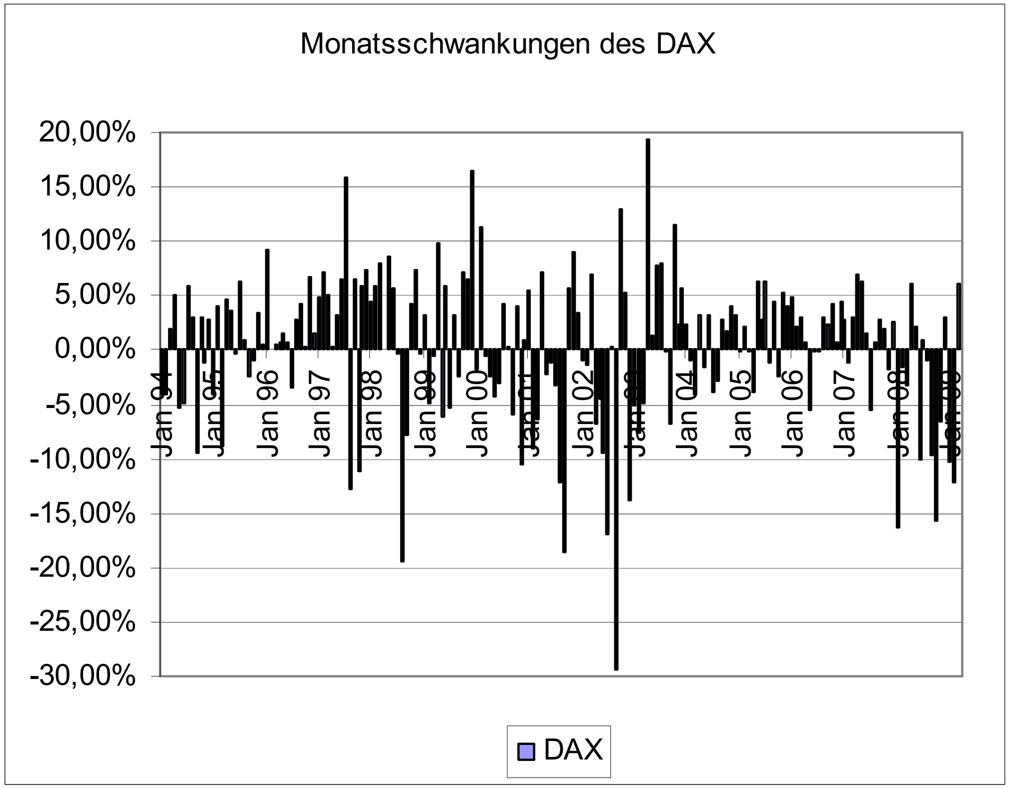
GESAMTBANKSTEUERUNG

- Rendite- und Risikoanalyse eines Portfolios
  - Gesamtrendite
  - Kovarianz
  - Korrelationen
- Gesamtrisiko eines Portofolios (Varianz/Kovarianzmodell)
- Historische Simulation
- Monte-Carlo-Simulation
- Vergleich der Modelle
- Risk/Return Diagramm

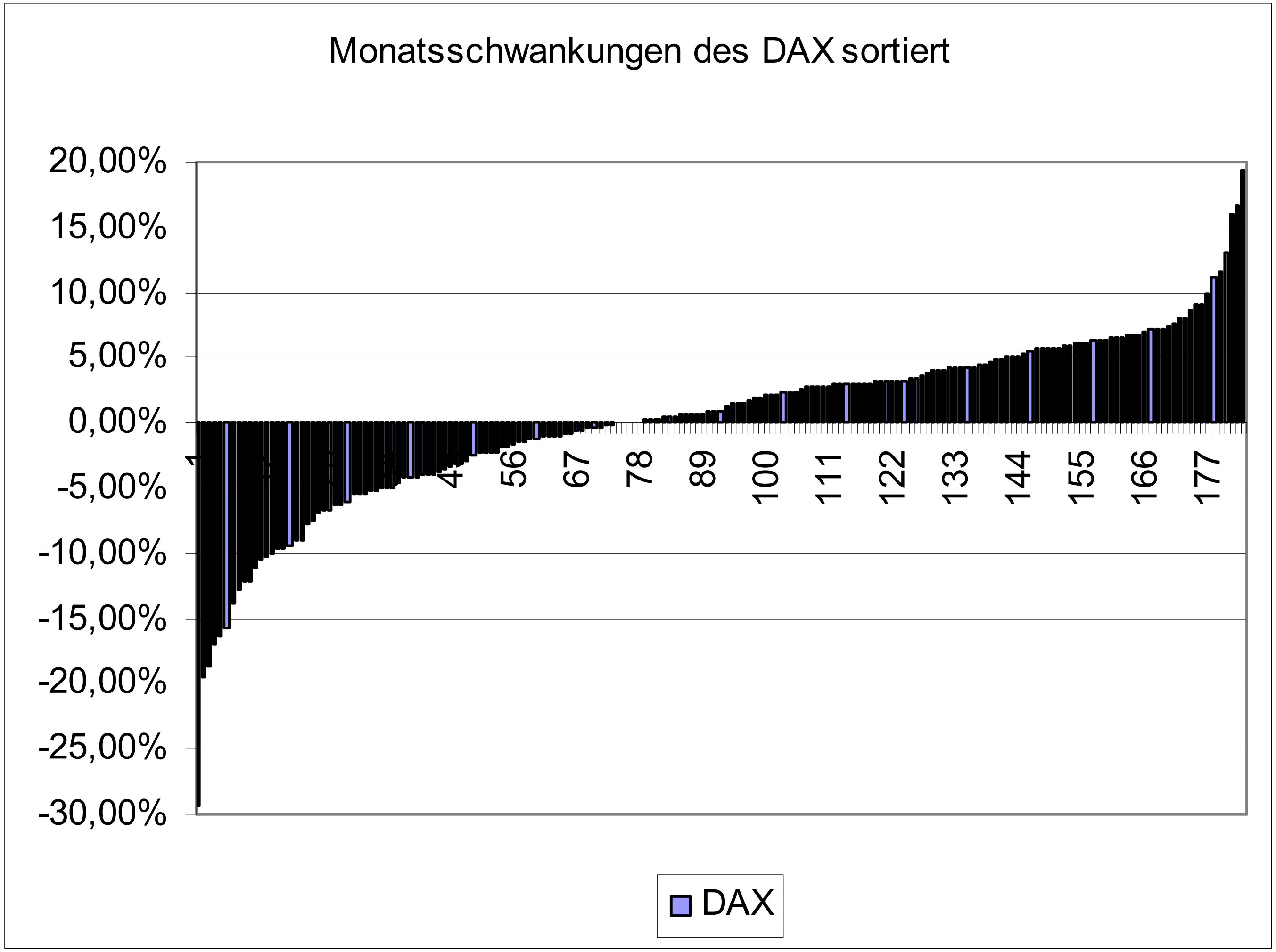
Historische Simulation (I)

GESAMTBANKSTEUERUNG

Bei der historischen Simulation werden zur Berechnung des Risikos die historischen Ereignisse sortiert, um dann duch Abzählen festzustellen, welcher Verlust bei gegebener Wahrscheinlichkeit in der Vergangenheit nicht überschritten wurde.



Historische Simulation (II)



Historische Simulation (III)

GESAMTBANKSTEUERUNG

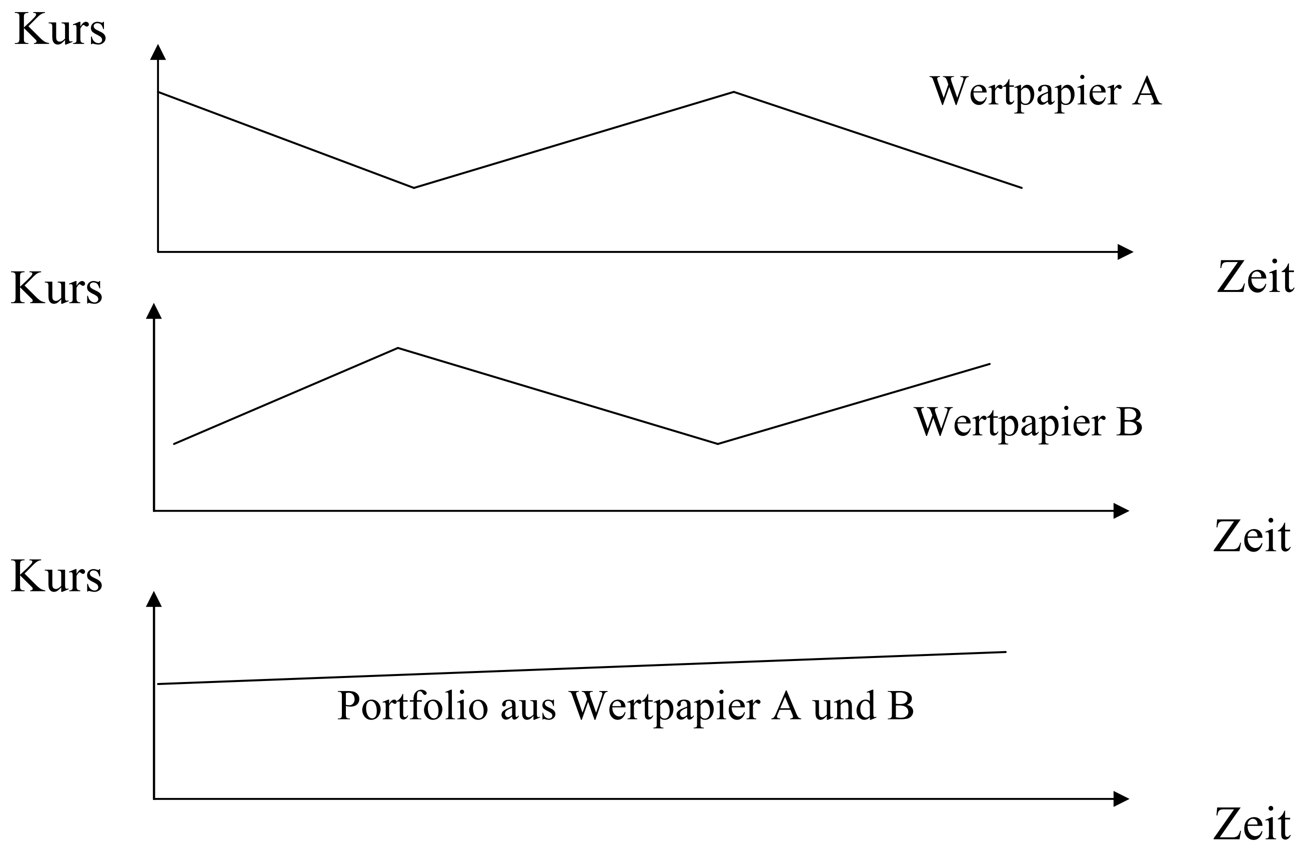
Konfidenzniveau und kritische Monatsschwankungen beim DAX.

Insgesamt liegen 183 Schwankungen vor (31.12.1993 bis 31.03.2009)

		Nr.	**Datum**	DAX
		1	30.09.2002	-29,33%
99%	=>	2	31.08.1998	-19,49%
		3	30.09.2001	-18,59%
		4	31.07.2002	-16,93%
		5	31.01.2008	-16,33%
		6	31.10.2008	-15,62%
		7	31.12.2002	-13,79%
		8	31.08.1997	-12,79%
		9	31.08.2001	-12,20%
95%	=>	10	28.02.2009	-12,10%
		11	31.10.1997	-11,19%
		12	30.11.2000	-10,49%
		13	31.01.2009	-10,32%
		14	30.06.2008	-10,05%
		15	30.09.2008	-9,66%
		16	30.09.1994	-9,53%
		17	30.06.2002	-9,48%
		18	28.02.2001	-9,03%
90%	=>	19	31.03.1995	-8,93%
		20	30.09.1998	-7,73%

Historische Simulation (IV)

Idealtypischer Diversfikationseffekt:



Historische Simulation (V)

Diversifikationseffekt:

Anlage: 5.000 Eur DAX-Portfolio

5.000 Eur REX-Portfolio

	Kurswert	VaR (p=95%)
DAX	5.000	605
REX	5.000	77
Portfolio		682

Ermittlung des VaR für jede Position gesondert!

Historische Simulation (VI)

GESAMTBANKSTEUERUNG

Diversifikationseffekte werden automatisch in die VaR-berechnung integriert:

1. Ermittlung der hist. Portfoliorenditen
2. Ermittlung des Portfolio-VaR

	Kurswert	VaR (p=95%)
DAX	5.000	
REX	5.000	
Portfolio		576

Ermittlung des VaR für das Gesamtportfolio!

Agenda

GESAMTBANKSTEUERUNG

- Rendite- und Risikoanalyse eines Portfolios
  - Gesamtrendite
  - Kovarianz
  - Korrelationen
- Gesamtrisiko eines Portofolios (Varianz/Kovarianzmodell)
- Historische Simulation
- Monte-Carlo-Simulation
- Vergleich der Modelle
- Risk/Return Diagramm

Monte-Carlo-Simulation (I)

Grundzüge der Monte-Carlo-Simulation:

1. Der Portfoliowert wird als Funktion der Werte der Marktfaktoren ausgedrückt (Zins, Aktienkurs, Devisenkurs)
2. Für die Marktfaktoren werden Verteilungen angenommen und deren Parameter bestimmt.
3. Mit einem Zufallsgenerator werden aus den Verteilungen sehr viele Realisationen möglicher Werte der Marktfaktoren gezogen.
4. Die gezogenen Marktfaktoren werden auf das Portfolio angewandt.
5. Wie bei der historischen Simulation werden die so erzeugten neuen Portfoliowerte sortiert und der VaR an der 1%- oder 5%-Grenze abgelesen.

Agenda

GESAMTBANKSTEUERUNG

GESAMTBANKSTEUERUNG

- Rendite- und Risikoanalyse eines Portfolios
  - Gesamtrendite
  - Kovarianz
  - Korrelationen
- Gesamtrisiko eines Portofolios (Varianz/Kovarianzmodell)
- Historische Simulation
- Monte-Carlo-Simulation
- **Vergleich der Modelle**
- Risk/Return Diagramm

Value at Risk - Ansätze

Value at Risk

- Historische Simulation
- Varianz / Kovarianz Modell
- Monte-Carlo-Simulation

- Value at Risk – Konzepte (VaR-Konzepte) bestimmen den maximalen Verlust eines Portfolios, der während eines bestimmten Zeitraums (Haltedauer) bei einer vorgegebenen Wahrscheinlichkeit (Konfidenzniveau) nicht überschritten wird.

Vergleich der Modelle

GESAMTBANKSTEUERUNG

	Vorteile	Nachteile
Varianz-Kovarianz-Ansatz	-Explizite Berücksichtigung der Korrelation -„geringer“ Berechnungsaufwand bei Kenntnis der Parameter -Weit verbreitete Methode	-Normalverteilungsannahme -Für nichtlineare Risiken nicht verwendbar (z.B. Optionen)
Historische Simulation	-Für alle Marktpreisrisiken geeignet -Implizite Berücksichtigung von Korrelationen -Integration sämtlicher Risikoarten möglich	-Vergangenheit als einziger Maßstab -Keine Transparenz der Korrelationen -Rel. hoher Berechnungsaufwand bei großen Portfolien
Monte-Carlo-Simulation	-Statistisch „saubere“ Lösung -Für alle Marktpreisrisiken einsetzbar -Integration sämtlicher Risiken möglich	-Sehr komplexes Modell -Hoher Rechenaufwand erforderlich -Annahme der Wahrscheinlichkeits-verteilung für Risikoparameter

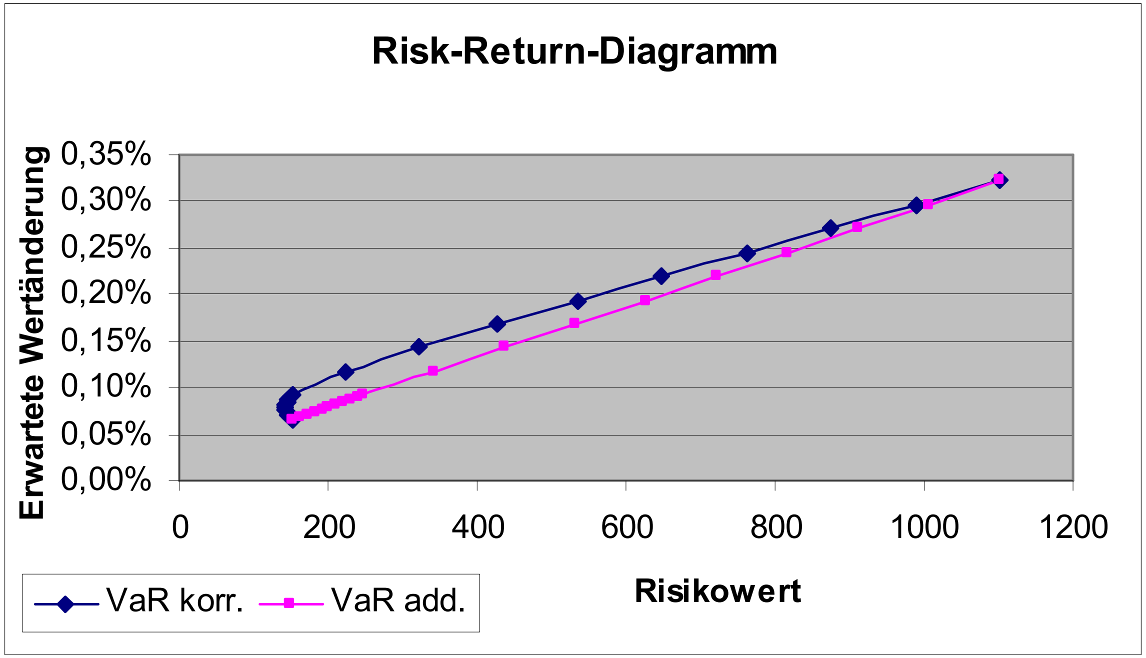
Agenda

- Rendite- und Risikoanalyse eines Portfolios
  - Gesamtrendite
  - Kovarianz
  - Korrelationen
- Gesamtrisiko eines Portofolios (Varianz/Kovarianzmodell)
- Historische Simulation
- Monte-Carlo-Simulation
- Vergleich der Modelle
- Risk/Return Diagramm

Risk/Return-Diagramm (I)

Beispiel auf der Basis des Varianz-Kovarianz-Ansatzes

- p = 95 %
- Portfolio besteht aus Investition in DAX und REX



Risk/Return-Diagramm (II)

GESAMTBANKSTEUERUNG

Mischungsverhältnis		Gesamtrendite	VaR korr.	VaR add.
DAX	REX			
0%	100%	0,07%	153,86	153,86
1%	99%	0,07%	149,88	163,35
2%	98%	0,07%	146,69	172,83
3%	97%	0,07%	144,36	182,32
4%	96%	0,08%	142,92	191,81
5%	95%	0,08%	142,39	201,29
6%	94%	0,08%	142,80	210,78
7%	93%	0,08%	144,13	220,26
8%	92%	0,09%	146,35	229,75
9%	91%	0,09%	149,43	239,23
10%	90%	0,09%	153,32	248,72
20%	80%	0,12%	223,29	343,57
30%	70%	0,14%	320,51	438,43
40%	60%	0,17%	426,75	533,28
50%	50%	0,19%	536,67	628,14
60%	40%	0,22%	648,41	722,99
70%	30%	0,25%	761,17	817,85
80%	20%	0,27%	874,55	912,70
90%	10%	0,30%	988,34	1007,56
100%	0%	0,32%	1102,41	1102,41

Risk/Return-Diagramm (III)

Man erkennt, dass bei gleicher erwarteter Wertänderung das Risiko bei Beachtung von Abhängigkeiten zwischen den Anlagealternativen niedriger aufgezeigt wird als bei reiner Addition.

Darauf aufbauend begründete Markovitz die Moderne Portfolio-Theorie.

Ziel: Ermittlung eines Risikomaßes, mit dem die in einem Portfolio-Verbund auftretenden Diversifikationseffekte, also der Nutzen der Streuung auf verschiedene Märkte, Regionen oder Anlageformen, messbar gemacht werden.

Im Beispiel: Jede Investitionszusammensetzung zwischen 5% Dax / 95% REX und 100% DAX / 0% REX ist günstig, eine Quote von weniger als 5% DAX ist unter Risk/Return-Gesichtspunkten unvorteilhaft: es gibt eine Investitionszusammensetzung, die bei gleichem Risiko eine höhere Ertragserwartung hat.