

# Vorlesung Gesamtbanksteuerung

*Mathematische Grundlagen I*

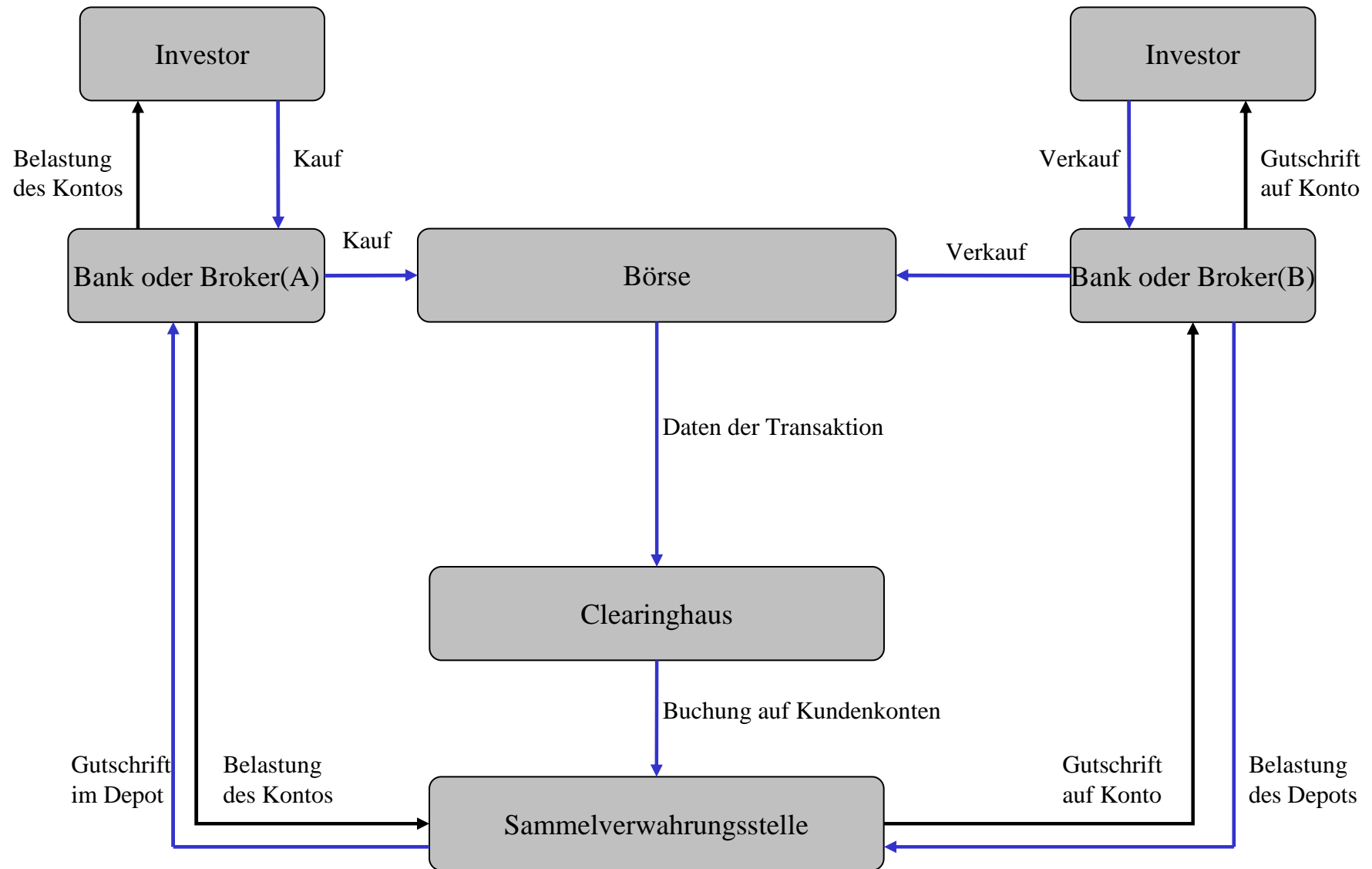
*Dr. Klaus Lukas*

*Carsten Neundorf*

# Agenda

- Handel und Märkte
- Rendite
- Zinsrechnung
- Zinseszins
- Zeitwert des Geldes
- Zinsgeschäfte und der zugehörige Cashflow
- Bewertung mit Zerobonds
- Strukturkongruente Refinanzierung
- Zinskurve

# Börsenhandel



# Teilnehmer Börsenhandel

## Die Börse

ist ein organisierter Markt, an dem Angebot und Nachfrage für Wertpapiere zusammengeführt werden.

Aufgaben:

- Bereitstellung kosteneffizienter Handelsplattformen
- Bündelung der Liquidität durch Konzentration von Angebot und Nachfrage
- Sicherstellung der Fungibilität, d.h. der Austauschbarkeit und der identischen Ausstattung einer Wertpapiergattung
- Sicherung einer größtmöglichen Transparenz für Anleger
- Bereitstellung von Informationen in Form von Preisen und Umsatzzahlen

## Broker

Der Zugang zum direkten Handel ist Investoren ohne Händlerzulassung nicht möglich. Auf dem Parkett dürfen ausschließlich die zugelassenen Börsenmitglieder, die im Auftrag ihrer Kunden Wertpapiere kaufen und verkaufen.

# Teilnehmer Börsenhandel

## Clearinghaus

In seiner Eigenschaft als zentrale Abwicklungsstelle für Börsengeschäfte tritt das Clearinghaus als Gegenpartei (Kontrahent) ein und garantiert damit eine vertragsgemäße Erfüllung und die Verrechnung der Nettoschuld.

Auf- und Verrechnung von Forderungen und Verbindlichkeiten aus Wertpapier- und Termingeschäften. Das Clearing ermittelt die bilaterale Nettoschuld von Käufer und Verkäufer aus einer börslichen oder außerbörslichen Transaktion. Diese Aufgabe übernimmt in der Regel eine zentrale Institution, das sog. Clearinghaus. Nach Abschluss eines Handelstages teilt das Clearinghaus seinen Mitgliedern ihre Transaktionen sowie die daraus verbleibenden Forderungen und Verbindlichkeiten mit. Bei Termingeschäften gibt es die Höhe der zu zahlenden Sicherheitsleistungen (Margins) an.

## zentrale Sammelverwahrungsstelle

Wenn Kunden einer Depotbank sich Aktien untereinander verkaufen, so kann dieses Geschäft direkt von der Depotbank abgewickelt werden. Handeln jedoch Kunden verschiedener Depotbanken miteinander, so wird dieses Geschäft meist über einen Zentralverwahrer abgewickelt mit dem beide Depotbanken verbunden sind. Dieses System hat den Vorteil, dass die Depotbanken nicht eine technische Verbindung zu jeder anderen Depotbank brauchen, sondern lediglich mit einem Zentralverwahrer verknüpft sein müssen, um Transaktionen zu Kunden anderer Depotbanken abwickeln zu können.

# Aktien u. Immobilien

## Aktien

gehören zu den Beteiligungspapieren. Aktien sind Wertpapiere, die Anteile an einem Unternehmen verbriefen. Der Inhaber bzw. Eigentümer einer Aktie ist am Grundkapital des Unternehmens beteiligt. Die mit einer Aktie verbrieften Rechte im einzelnen:

- Teilnahme an der Hauptversammlung
- Stimmrecht in der Hauptversammlung
- Recht auf Anteil am Unternehmensgewinn
- Bezugsrecht bei der Ausgabe junger Aktien

## Immobilien

Anlagemöglichkeiten:

- direktes Investment in eine Immobilie
- Immobilienfonds: Sammeln das Geld der Investoren und investieren in Objekte. Die Erträge aus Mieten und Veräußerungen werden ausgeschüttet. Bei starken Abflüssen müssen Objekte ggf. unter Wert veräußert werden
- REITs und Immobilienaktien: Bei starken Abflüssen sind die Gesellschaften nicht gezwungen, Objekte zu verkaufen. Abflüsse haben lediglich Auswirkungen auf den Kurs der Aktie. REITs unterliegen besonderen steuerlichen Vergünstigungen, müssen im Gegenzug aber einige staatlich Auflagen erfüllen.

# Rohstoffe u. Devisen

## Rohstoffe

Eine Investition in Rohstoffe erfolgt meist nicht physikalische Bestände sondern in Termingeschäfte oder börsengehandelte Exchange Traded Commodities. Grob unterteilt man die Rohstoffe in folgende Klassen:

- Energie (Erdöl und Erdgas)
- Edelmetalle (Silber, Gold, Platin)
- Industriemetall (Kupfer)
- Agrikultur (Kaffe, Kakao, Soja)
- Lebendvieh

## Devisen

Der Devisenhandel erfolgt fast ausschließlich zwischen den Marktteilnehmern direkt. Der Handel erfolgt in den beiden folgenden Produkten:

- Devisenkassageschäft: zwischen dem Tag des Geschäftsabschlusses und dem Tag der Erfüllung der beiderseitigen Ansprüche liegt ein Zeitraum von maximal zwei Tagen. Es handelt sich um einen reinen Währungstausch
- Devisentermingeschäft: liegen zwischen dem Geschäftsabschluss und dem Tag der Erfüllung mehr als zwei Tage, so spricht man von Devisentermingeschäft. Der Wechselkurs wird bei Geschäftsabschluss festgelegt und muss am Erfüllungstag erfüllt werden, unabhängig von der tatsächlichen Kurssituation.

Wechselkurse werden immer als Paar der beiden Währungen angegeben:

EURUSD 1,3947

# Anleihen

## Anleihen

(auch genannt: Renten, festverzinsliche Wertpapiere, Bonds, Schuldverschreibungen, Obligationen) werden von Kreditinstituten, der „öffentlichen Hand“ und Unternehmen begeben. Abhängig vom Emittenten der Anleihe unterscheidet man:

- Bundes-/Staatsanleihen: Emittent ist die Bundesrepublik Deutschland, einer der Bundesländer oder ein anderer Staat
- Unternehmensanleihen/Corporate Bonds: Unternehmen nutzen den Kapitalmarkt, um sich mit Anleihen statt über Bankkredite zu finanzieren. Die Anleihen sind in der Regel nachrangig besichert. Die Verzinsung und der Kurs ist stark vom Rating des Unternehmens abhängig.
- Pfandbriefe: Banken vergeben Kredite an Privat- und Unternehmenskunden. Das benötigte Kapital dafür holen sie sich über die Emission von Anleihen. Pfandbriefe sind eine spezielle Form dieser Anleihen. Die Kredite, die in Pfandbriefe einfließen, dürfen nur der Finanzierung von Grundstücken und Häusern dienen. Die Kredite sind besichert. Als Pfand dienen die finanzierten Immobilien und Grundstücke.

Anleihen verbriefen das Recht auf Rückzahlung des Kredits zu einem bestimmten Zeitpunkt zuzüglich Verzinsung. Anleihen haben unterschiedliche Ausstattungsmerkmale:

- Nennwert: Er gibt die Höhe der Geldforderung an und bildet die Basis der Verzinsung
- Verzinsung: Man unterscheidet festverzinsliche, variabel verzinsliche und Nullkupon-Anleihen. Zinsen werden jährlich, halbjährlich, vierteljährlich oder monatlich gezahlt
- Tilgung: Üblicherweise werden Anleihen am Ende der Laufzeit getilgt. Es gibt aber auch Anleihen mit Raten- oder Annuitätentilgung.
- Kurs



# Agenda

- Handel und Märkte
- **Rendite**
- Zinsrechnung
- Zinseszins
- Zeitwert des Geldes
- Zinsgeschäfte und der zugehörige Cashflow
- Bewertung mit Zerobonds
- Strukturkongruente Refinanzierung
- Zinskurve

# Rendite

## Wie lässt sich der Erfolg eines Geschäfts messen?

$P_0$  sei der Kurs zum Zeitpunkt  $t_0$ ,  $P_1$  der Kurs zum Zeitpunkt  $t_1$ .  $A_i$  bezeichnet die Auszahlungen im Zeitraum zwischen  $t_0$  und  $t_1$ .

1. Als absoluter Ertrag

$$E = P_1 - P_0 + \sum_i A_i$$

2. Diskrete Rendite

berechnet sich als prozentualer Zuwachs von einem Zeitpunkt zum anderen

$$R = \frac{(P_1 + \sum_i A_i - P_0)}{P_0} = \frac{P_1 + \sum_i A_i}{P_0} - 1$$

# Rendite

Wie lässt sich der Erfolg eines Geschäfts messen?

3. Stetige Rendite

$$r = \ln \frac{P_1 + \sum_i A_i}{P_0} = \ln \left( P_1 + \sum_i A_i \right) - \ln P_0$$

Ein kleines Beispiel für die Vorteile der stetigen Rendite:

In  $t_0$  beträgt der Kurs 100, in  $t_1$  140, in  $t_2$  wieder 100.

Bei der diskreten Rendite erhalten wir  $R_1=40\%$  und  $R_2=-28,6\%$ , in Summe also  $+11,4\%$

Für die stetige Rendite erhalten wir  $r_1=33,6$  und  $r_2=-33,6$  in Summe also  $0\%$ .

# Agenda

- Handel und Märkte
- Rendite
- **Zinsrechnung**
- Zinseszins
- Zeitwert des Geldes
- Zinsgeschäfte und der zugehörige Cashflow
- Bewertung mit Zerobonds
- Strukturkongruente Refinanzierung
- Zinskurve

# Beispiel einer Anleihe

Ausgestaltung einer typischen Anleihe:

Nominalvolumen (K): 10.000.000 EUR

Zinssatz (Z): 4,00%

Zinszahlung: jährlich zum 30.06.

Tagemethode: 30/360

Fälligkeit: 30.06.2015

# Der Zinsertrag

Anhand dieses Geschäfts sollen die verschiedenen Begriffe aus der Zinsrechnung eingeführt werden. Der Zinsertrag  $ZE$  ergibt sich als

$$ZE = K * Z$$

Und für unser Beispiel ergibt sich:

$$ZE = 10.000.000 * 4\% = 400.000$$

# Das einfache Zinskonzept

In unserem Beispiel war jährliche Zinszahlung vereinbart. Halbjährliche, vierteljährliche oder monatliche Zinszahlungen sind ebenfalls üblich. Wie sieht in diesem Fall die Zinszahlung aus? Der Zinsertrag errechnet sich in diesem Fall nach folgender Formel:

$$ZE = K * Z * \frac{\text{Anlageperiode}}{\text{Anzahl der jährlichen Perioden}}$$

Wäre in unserem Beispiel vierteljährliche Zinszahlung vereinbart worden, so ergäbe sich:

$$ZE = 10.000.000 * 4\% * \frac{1}{4} = 100.000$$

# Zinstagemethoden

Wie berechnet sich der Anteil am Gesamtjahr?

Methode	Jahresbasis	Monatsbasis
act/360	360 Tage	28-31 Tage
30/360	360 Tage	30 Tage
act/act	365/366 Tage	28-31 Tage



# Der Zinssatz

Wie errechnet sich der Zinssatz bei gegebenen Kapital und Zinsertrag?

$$Z = \frac{(K + ZE) - K}{K} = \frac{ZE}{K}$$

# Der annualisierte Zinssatz

Erfolgt die Zinszahlung unterjährig, so ergibt sich folgende Formel:

$$Z = \frac{(K + ZE) - K}{K} \div \frac{\text{Anlageperiode}}{\text{Anzahl der jährlichen Perioden}} * 100$$

Für unser Beispiel ergibt sich:

$$Z = \frac{(10.000.000 + 100.000) - 10.000.000}{10.000.000} \div \frac{1}{4} = 4,00\%$$

# Der Zinsertrag

Möchte man den Zinsertrag einer Anlage über eine bestimmte Periode berechnen, so ergibt sich der Gesamtbetrag als Summe der Teilerträge:

$$ZE_{Gesamt} = \sum_{i=1}^n ZE_i$$

# Agenda

- Handel und Märkte
- Rendite
- Zinsrechnung
- **Zinseszins**
- Zeitwert des Geldes
- Zinsgeschäfte und der zugehörige Cashflow
- Bewertung mit Zerobonds
- Strukturkongruente Refinanzierung
- Zinskurve

# Die Zinseszinsrechnung

Bis jetzt haben wir nur untersucht, wie sich Zinsen und Zinserträge bei einer Anlage für eine Periode verhalten.

Im nächsten Schritt gehen wir davon aus, dass die Investition nicht nur für ein, sondern für zwei Jahre getätigt wird. Weiterhin wird der Zinsertrag ebenfalls zu den vereinbarten Konditionen angelegt.

# Die Zinseszinsrechnung

$$1.\text{Jahr} : K = 1.000.000 * \frac{5}{100} + 1.000.000 = 1.050.000$$

$$2.\text{Jahr} : K = 1.050.000 * \frac{5}{100} + 1.050.000 = 1.102.500$$

Es ergibt sich über die gesamte Laufzeit ein Zinsertrag in Höhe von 102.500 EUR.

Verallgemeinert man das Beispiel auf n Jahre, so erhält man folgende Formel für den Zinsertrag:

$$ZE = K * \left(1 + \frac{Z}{100}\right)^n - K$$

# Die Zinseszinsrechnung

Dieser Zinseszinseffekt trifft immer auf, wenn die Zinsberechnungsperiode kürzer als die Anlageperiode ist.

Dies ist auch der Fall, wenn die Zinszahlung unterjährig erfolgt und die Anlageperiode mehrere Zinszahlungsperioden umfasst.

Wenn man all diese Parameter berücksichtigen will, so erhält man folgende Formel:

$$ZE = K * \prod_{i=1}^m \left( 1 + \frac{Z_i}{100} * \text{Jahresanteil}_i \right) - K$$

# Zinseszins – Ein Beispiel

Was bedeutet nun diese Formel und wie rechnet man damit? Auch das sieht man am besten an einem Beispiel:

Es werden 1.000.000 EUR für 2 Jahre investiert und es werden 4 Zinszahlungen vereinbart, nach  $\frac{1}{3}$  Jahr, nach  $\frac{2}{3}$  Jahr nach 1 Jahr und 2 Jahren. Für die ersten drei Perioden wird ein Zinssatz von 3% vereinbart, für die letzte ein Zinssatz von 5%. Welcher Zinsertrag steht dem Investor am Ende der Laufzeit unter Berücksichtigung aller Zinseszinsseffekte zur Verfügung?



# Zinseszins – Ein Beispiel

Wir haben vier Zinszahlungen vereinbart, also ist in der Formel  $m=4$  zu setzen.

Jahresanteil<sub>1</sub>, Jahresanteil<sub>2</sub>, und Jahresanteil<sub>3</sub> sind jeweils  $1/3$  und Jahresanteil<sub>4</sub> ist  $1$ .

Als Letztes fehlen uns noch die  $Z_i$  um die Formel komplett befüllen zu können.

Für  $i=1,2,3$  ist  $Z_i$   $3\%$  und  $Z_4$  ist  $5\%$ .

# Zinseszins – Ein Beispiel

$$ZE = 1.000.000 * \left( \underbrace{\left(1 + \frac{3}{100} * \frac{1}{3}\right)}_{i=1} * \underbrace{\left(1 + \frac{3}{100} * \frac{1}{3}\right)}_{i=2} * \underbrace{\left(1 + \frac{3}{100} * \frac{1}{3}\right)}_{i=3} * \underbrace{\left(1 + \frac{5}{100} * \frac{1}{1}\right)}_{i=4} \right) - 1.000.000$$

$$\begin{aligned} ZE &= 1.000.000 * 1,08181605 - 1.000.000 \\ &= 1.081.816,05 - 1.000.000 \\ &= 81.816,05 \end{aligned}$$

# Die stetige Verzinsung

Als nächstes untersuchen wir einen Spezialfall der Zinseszinsrechnung. Was passiert, wenn wir genau ein Jahr betrachten und dieses in jeweils gleichgroße Abschnitte unterteilen und den Zinssatz konstant lassen?

Betrachten wir nochmals die Formel zur Zinseszinsberechnung:

$$ZE = K * \prod_{i=1}^m \left( 1 + \frac{Z_i}{100} * \text{Jahresanteil}_i \right) - K$$

# Die stetige Verzinsung

Durch die Annahme von konstanten Zinsen  $Z$  und gleichlangen Anteilen eines Jahres  $m$  ergibt sich folgende Vereinfachung:

$$ZE = K * \left( 1 + \frac{Z}{100} * \frac{1}{m} \right)^m - K$$

Werden die Perioden immer kürzer, dann muss  $m$  immer größer werden. Dies kann man beliebig fortsetzen, so dass  $m$  gegen unendlich geht (Schreibweise:  $\lim_{m \rightarrow \infty}$ ). Es ergibt sich folgende Formel:

$$ZE + K = \lim_{m \rightarrow \infty} K * \left( 1 + \frac{Z}{m * 100} \right)^m = K * (e^1)^{Z/100} = K * e^{Z/100}$$

# Die stetige Verzinsung

Welche Vorteile hat die stetige Verzinsung?

Einer der Vorteile ist, dass man sich keine Gedanken über die Zinskapitalisierung machen muss, da quasi jederzeit kapitalisiert wird.

Anwendung in wissenschaftlichen Untersuchungen und im Pricing von Derivaten

# Agenda

- Handel und Märkte
- Rendite
- Zinsrechnung
- Zinseszins
- **Zeitwert des Geldes**
- Zinsgeschäfte und der zugehörige Cashflow
- Bewertung mit Zerobonds
- Strukturkongruente Refinanzierung
- Zinskurve

# Der Zeitwert des Geldes

Wie kann man die Vorteilhaftigkeit verschiedener Investitionen vergleichen?

Zahlungen zu verschiedenen Zeitpunkten können nicht direkt miteinander verglichen werden. Der Wert der Zahlungen muss für einen gemeinsamen Zeitpunkt berechnet werden.

Im Rahmen der Zinsrechnung haben wir berechnet, welche Zahlung wir nach  $n$  Jahren erhalten, wenn wir heute einen gewissen Betrag investieren.

Wir können die Fragestellung aber auch so formulieren, dass wir überlegen, welchen Wert z.B. 1.000 EUR, die wir in  $n$  Jahren haben, heute hätte.

# Der Zeitwert des Geldes

Noch einmal die Formel für die Zinseszinsrechnung:

$$\underbrace{K + ZE}_{FV_n} = \underbrace{K}_{PV} * \left(1 + \frac{Z}{100}\right)^n$$

Lösen wir die Formel nach PV auf, so erhalten wir:

$$PV = FV_n * \frac{1}{\left(1 + \frac{Z}{100}\right)^n}$$

Wollen wir in zwei Jahren 1.000 EUR erhalten und haben einen Zinssatz von 5% vereinbart, wieviel müssten wir heute investieren?

$$PV = FV_2 * \frac{1}{\left(1 + \frac{5}{100}\right)^2} = 1.000 * \frac{1}{1,1025} = 907,03 \text{ EUR}$$



# Der Zeitwert des Geldes

Will man den Wert für eine unterjährige Zahlung ermitteln, geht man ebenso vor. Man überlegt, welchen Betrag wir heute anlegen müssen, um am Ende den gewünschten Betrag zu erhalten. Es ergibt sich folgende Formel:

$$PV = FV * \frac{1}{\left(1 + \frac{Z}{100} * \text{Jahresanteil}\right)}$$

Der Wert PV wird auch Barwert der Zahlung genannt, der Bruch als Diskontierungsfaktor  $DF_n$ .

# Agenda

- Handel und Märkte
- Rendite
- Zinsrechnung
- Zinseszins
- Zeitwert des Geldes
- **Zinsgeschäfte und der zugehörige Cashflow**
- Bewertung mit Zerobonds
- Strukturkongruente Refinanzierung
- Zinskurve

# Cashflows

Kommen wir zurück zu unserer Beispielanleihe. Hier nochmals die Daten:

Nominalvolumen (K): 10.000.000 EUR

Zinssatz (Z): 4,00%

Zinszahlung: jährlich zum 30.06.

Tagemethode: 30/360

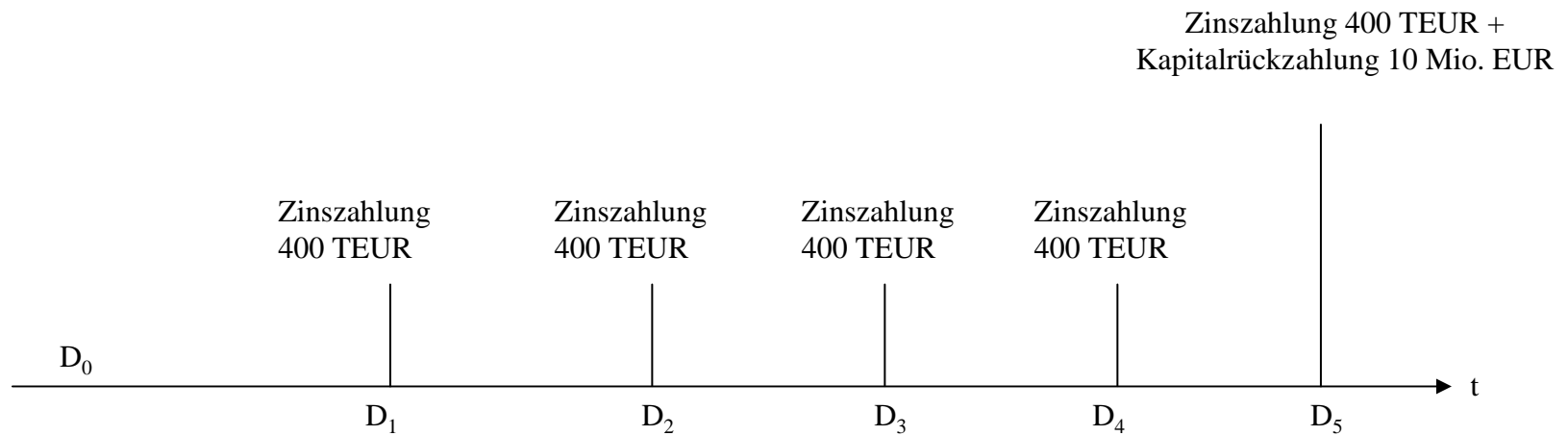
Fälligkeit: 30.06.2015

Welche Zahlungen erwarten wir?

# Cashflows

30.06.2011 Zinszahlung 400.000 EUR  
30.06.2012 Zinszahlung 400.000 EUR  
30.06.2013 Zinszahlung 400.000 EUR  
30.06.2014 Zinszahlung 400.000 EUR  
30.06.2015 Zinszahlung 400.000 EUR  
30.06.2015 Tilgung 10.000.000 EUR

# Zahlungsströme



# Agenda

- Handel und Märkte
- Rendite
- Zinsrechnung
- Zinseszins
- Zeitwert des Geldes
- Zinsgeschäfte und der zugehörige Cashflow
- **Bewertung mit Zerobonds**
- Strukturkongruente Refinanzierung
- Zinskurve

# Der Barwert eines Zahlungsstroms

Der Discountfaktor berechnet sich wie folgt:

$$DF_n = \frac{1 - Z_n * \sum_{i=1}^{n-1} DF_i}{1 + Z_n}$$

Der zugehörige Zerobondzinssatz berechnet man mit der Formel:

$$Z_{z_n} = \left( \frac{1}{DF_n} \right)^{1/n} - 1$$

# Der Barwert eines Zahlungsstroms

Für die folgenden Untersuchungen brauchen wir noch die aktuellen Zinssätze für die verschiedenen Laufzeiten: Im Beispiel sein dies:

1 Jahr 4,00%	2 Jahre 4,50%	3 Jahre 5,00%
4 Jahre 5,50%	5 Jahre 6,00%	

Die zugehörigen Zerobondsätze lauten:

1 Jahr 4,00%	2 Jahre 4,5113%	3 Jahre 5,0341%
4 Jahre 5,5719%	5 Jahre 6,1289%	



# Barwertberechnung mit Zerosätzen

Berechnet man die Kurse für die Zerobonds der verschiedenen Laufzeiten, so kann man anschließend mit deren Hilfe den Kurs des Wertpapiers einfach berechnen.

Aufgrund der Zinsstruktur ergeben sich folgende Kurse für die Zerobonds:

5-Jahre: 74,27%

4-Jahre: 80,50%

3-Jahre: 86,30%

2-Jahre: 91,55%

1-Jahr: 96,15%

# Barwertberechnung mit Zerosätzen

Anschließend kann man jeden einzelnen Cashflow mit den entsprechenden Kursen multiplizieren und erhält so den Barwert des Geschäfts

	t(0)	t(1)	t(2)	t(3)	t(4)	t(5)
Zahlungsstrom		400.000 €	400.000 €	400.000 €	400.000 €	10400.000 €
Zero-Kurs		0,96153846	0,91553184	0,86299665	0,80502021	0,742730916
Barwert		384.615 €	366.213 €	345.199 €	322.008 €	7.724.40 €
Summe	9.142.436 €					

# Agenda

- Handel und Märkte
- Rendite
- Zinsrechnung
- Zinseszins
- Zeitwert des Geldes
- Zinsgeschäfte und der zugehörige Cashflow
- Bewertung mit Zerobonds
- **Strukturkongruente Refinanzierung**
- Zinskurve

# Der Barwert eines Zahlungsstroms

Möchte man bei der Berechnung des Wertes eines Zahlungsstroms zusätzlich noch Geld-/Briefspannen berechnen, so muss man den Wert mit Hilfe der strukturkongruenten Refinanzierung berechnen.

# Der Barwert eines Zahlungsstroms

Zur Erinnerung nochmals den Zahlungsstrom:

	t(0)	t(1)	t(2)	t(3)	t(4)	t(5)
Zahlungsstrom		400.000 €	400.000 €	400.000 €	400.000 €	10400.000 €

Bei der strukturkongruenten Refinanzierung, kurz SKR, beginnt man die zeitlich letzte Zahlung in t(5) mit einem Marktgeschäft auf Basis der Zinskurve zu schließen.

Wir berechnen, wieviel Geld heute aufgenommen werden muß, damit am Ende eine Zahlung in Höhe von 104 TEUR erfolgt. Mit Hilfe unserer Formeln für die Zinsrechnung ergibt sich:

$$X = \frac{10.400.000 \text{ EUR}}{(1 + 6\%)} = \frac{10.400.000 \text{ EUR}}{1,06} = 9.811.331 \text{ EUR}$$

und ein Zinsaufwand von 588.679 EUR. Zusammengefasst mit dem ursprünglichen Cashflow ergibt sich:

# Der Barwert eines Zahlungsstroms

	t(0)	t(1)	t(2)	t(3)	t(4)	t(5)
Zahlungsstrom		400.000 €	400.000 €	400.000 €	400.000 €	10400.000 €
Geschäft zu 6,0%	9.811.321 €	-588.679 €	-588.679 €	-588.679 €	-588.679 €	-10.400.000 €
Zwischenergebnis 1	9.811.321 €	-188.679 €	-188.679 €	-188.679 €	-188.679 €	0 €

Nun wird das gleiche Vorgehen für t(4) angewendet: Wir müssen auf eine Zahlung von -188.679 EUR bei einem Zinssatz von 5,5% kommen. Dies gelingt mit einer Anlage von 178.843 EUR.

	t(0)	t(1)	t(2)	t(3)	t(4)	t(5)
Zahlungsstrom		400.000 €	400.000 €	400.000 €	400.000 €	10400.000 €
Geschäft zu 6,0%	9.811.321 €	-588.679 €	-588.679 €	-588.679 €	-588.679 €	-10.400.000 €
Zwischenergebnis 1	9.811.321 €	-188.679 €	-188.679 €	-188.679 €	-188.679 €	0 €
Geschäft zu 5,5%	-178.843 €	9.836 €	9.836 €	9.836 €	188.679 €	
Zwischenergebnis 2	9.632.478 €	-178.843 €	-178.843 €	-178.843 €	0 €	

# Der Barwert eines Zahlungsstroms

Vervollständigt man die Vorgehensweise bis  $t(1)$ , so fallen in  $t(1)$  bis  $t(5)$  keine Zahlungen mehr an. Was bleibt ist der Betrag in  $t(0)$ , der den (Bar)Wert des Geschäftes darstellt. Das vollständige Schema für unser Beispiel sieht so aus:

	t(0)	t(1)	t(2)	t(3)	t(4)	t(5)
Zahlungsstrom		400.000 €	400.000 €	400.000 €	400.000 €	10400.000 €
Geschäft zu 6,0%	9.811.321 €	-588.679 €	-588.679 €	-588.679 €	-588.679 €	-10.400.000 €
Zwischenergebnis 1	9.811.321 €	-188.679 €	-188.679 €	-188.679 €	-188.679 €	0 €
Geschäft zu 5,5%	-178.843 €	9.836 €	9.836 €	9.836 €	188.679 €	
Zwischenergebnis 2	9.632.478 €	-178.843 €	-178.843 €	-178.843 €	0 €	
Geschäft zu 5,0%	-170.327 €	8.516 €	8.516 €	178.843 €		
Zwischenergebnis 3	9.462.151 €	-170.327 €	-170.327 €	0 €		
Geschäft zu 4,5%	-162.992 €	7.335 €	170.327 €			
Zwischenergebnis 4	9.299.159 €	-162.992 €	0 €			
Geschäft zu 4,0%	-156.723 €	162.992 €				
Endergebnis	9.142.436 €	0 €				

Der Barwert des Geschäftes ist also rund 9.142.436 EUR.

# Renditebegriff bei Wertpapieren

Beim Kauf eines Wertpapiers interessiert einen Investor, wie sein durchschnittlicher Erfolg pro Jahr aussehen wird, wenn er das Wertpapier bis zur Fälligkeit hält.

Bei einem Kaufkurs  $P$ , einer jährlichen Zinszahlung in Höhe von  $c$  und dem Rückzahlungsbetrag  $RZ$  am Laufzeitende ergibt sich die Rendite  $c$  aus folgender Gleichung:

$$P = \frac{c}{(1 + y/100)} + \frac{c}{(1 + y/100)^2} + \dots + \frac{c}{(1 + y/100)^t} + \frac{RZ}{(1 + y/100)^t}$$

$$P = \sum_{i=1}^t \frac{c}{(1 + y/100)^i} + \frac{RZ}{(1 + y/100)^t} \quad \text{oder} \quad P = \sum_{i=1}^t \frac{CF_i}{(1 + y/100)^i}$$

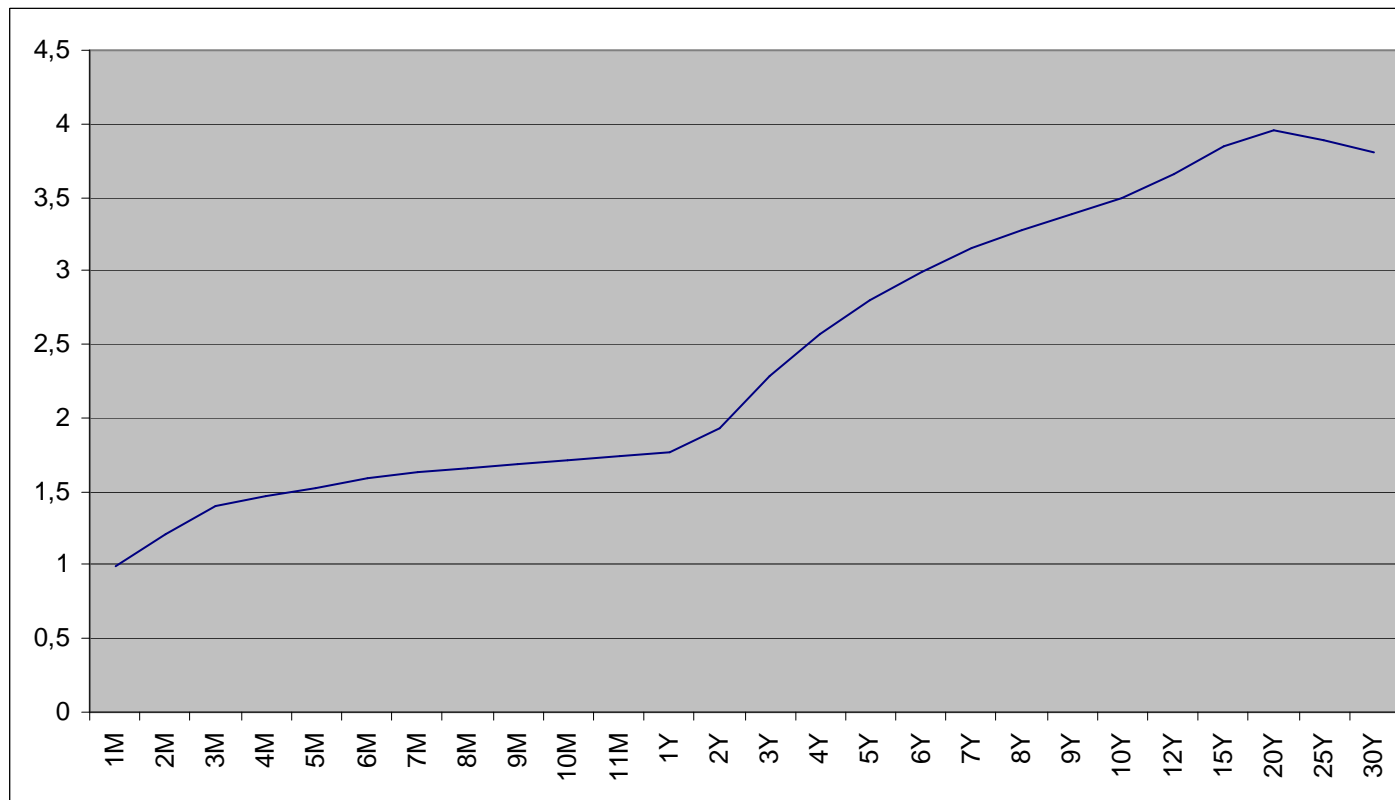


# Agenda

- Handel und Märkte
- Rendite
- Zinsrechnung
- Zinseszins
- Zeitwert des Geldes
- Zinsgeschäfte und der zugehörige Cashflow
- Bewertung mit Zerobonds
- Strukturkongruente Refinanzierung
- Zinskurve

# Die Zinskurve und ihre Informationen

Unter einer Zinskurve versteht man die graphische Darstellung von Zinssätzen für verschiedene Laufzeiten.



# Die Zinskurve und ihre Informationen

Wir haben somit eine Darstellung, wie der Markt die Zinssätze im Moment handelt.

Aber die Zinskurve enthält darüber hinaus auch noch Informationen über zukünftige Zinssätze. Die derart abgeleiteten Zinssätze werden Forwards genannt.

Wie diese ermittelt werden untersuchen wir im folgenden anhand eines Beispiels:

Wir betrachten einen Investor, der Geld für 4 Jahre anlegen will. Als Möglichkeiten stehen ihm zur Verfügung:

1. Anlage für 4 Jahre zu 5,15%
2. Anlage für 3 Jahre zu 4,65%, kombiniert mit einer Geldanlage für das verbleibende Jahr zu X%

# Die Zinskurve und ihre Informationen

Wie hoch muss der Zins  $X$  sein, damit beide Anlagen den gleichen Ertrag bringen?

$$K * \left(1 + \frac{5,15}{100}\right)^4 = K * \left(1 + \frac{4,65}{100}\right)^3 * \left(1 + \frac{X}{100}\right)^{(4-3)}$$

Löst man die Gleichung nach  $X$  auf, so ergibt sich:

$$\frac{X}{100} = \sqrt[4-3]{\frac{\left(1 + \frac{5,15}{100}\right)^4}{\left(1 + \frac{4,65}{100}\right)^3}} - 1 = 0,06667 \approx 6,67\%$$

In diesem Fall beträgt der Forwardsatz in 3 Jahren für 1 Jahr also 6,67%.

# Die Zinskurve und ihre Informationen

Die Gleichung lässt sich wie folgt verallgemeinern:

$$\frac{Z_{i,j}}{100} = n_j - n_i \sqrt[n_j - n_i]{\frac{\left(1 + \frac{Z_j}{100}\right)^{n_j}}{\left(1 + \frac{Z_i}{100}\right)^{n_i}}} - 1$$

