GESAMTBANKSTEUERUNG

Vorlesung Gesamtbanksteuerung

Mathematische Grundlagen I

Dr. Klaus Lukas

Carsten Neundorf

Agenda

- Zinsrechnung
- Zinseszins
- Zeitwert des Geldes
- Strukturkongruente Refinanzierung
- Rendite
- Zinskurve

Das einfache Zinskonzept

Beispiel: Ein Investor legt 1.000.000 EUR für ein Jahr an und bekommt nach Ablauf des Jahres 1.050.000 EUR zurück.

In welche Bestandteile lässt sich diese Zahlung zerlegen?

-Rückzahlung in Höhe von 1 Mio. EUR

-Zinszahlung von 50.000 EUR

Das einfache Zinskonzept

GESAMTBANKSTEUERUNG

Wie kommt man von diesen Angaben zum vereinbarten Zinssatz?

$$Z = \frac{(K + ZE) - K}{K} * 100 = \frac{ZE}{K} * 100$$

Für unser Beispiel ergibt sich:

$$Z = \frac{(1.000.000 + 50.000) - 1.000.000}{1.000.0000} * 100 = 0{,}05 * 100 = 5{,}00\%$$

Der annualisierte Zinssatz

Was passiert, wenn die Anlage nicht für ein Jahr getätigt wird, sondern nur für 1/4 Jahr?

$$Z = \frac{(K + ZE) - K}{K} \div \frac{Anlageperiode}{Anzahl\ der\ \ jährlichen\ Perioden} * 100$$

Für unser Beispiel ergibt sich:

$$Z = \frac{(1.000.000 + 50.000) - 1.000.000}{1.000.0000} \div \frac{1}{4} * 100 = 20{,}00\%$$

Der Zinsertrag

Anhand der vorherigen Formel lassen sich auch die Zinszahlungen einer Anlage errechnen. Durch Umstellen der Formel erhält man:

$$ZE = K * \frac{Z * Anlageperiode}{Anzahl\ der\ \ jährlichen\ Perioden * 100}$$

Und für unser Beispiel ergibt sich:

$$ZE = 1.000.000 * \frac{20 * 1}{4 * 100} * 100 = 50.000$$

Der Zinsertrag

GESAMTBANKSTEUERUNG

Möchte man den Zinsertrag ein Anlage über eine bestimmt Periode berechnen, so ergibt sich der Gesamtertrag als Summe der Teilerträge:

$$ZE_{Gesamt} = \sum_{i=1}^{n} ZE_i$$

Zinstagemethoden

GESAMTBANKSTEUERUNG

Wie berechnet sich der Anteil am Gesamtjahr?

Methode	Jahresbasis	Monatsbasis
act/360	360 Tage	28-31 Tage
30/360	360 Tage	30 Tage
act/act	365/366 Tage	28-31 Tage

Agenda

- Zinsrechnung
- **Zinseszins**
- Zeitwert des Geldes
- Strukturkongruente Refinanzierung
- Rendite
- Zinskurve

Die Zinseszinsrechnung

GESAMTBANKSTEUERUNG

Bis jetzt haben wir nur untersucht, wie sich Zinsen und Zinserträge bei einer Anlage für eine Periode verhalten.

Im nächsten Schritt gehen wir davon aus, dass die Investition nicht nur für ein, sondern für zwei Jahre getätigt wird. Weiterhin wird der Zinsertrag ebenfalls zu den vereinbarten Konditionen angelegt.

Die Zinseszinsrechnung

$$1.Jahr : K = 1.000.000 * \frac{5}{100} + 1.000.000 = 1.050.000$$

$$2.Jahr : K = 1.050.000 * \frac{5}{100} + 1.050.000 = 1.102.500$$

Es ergibt sich über die gesamte Laufzeit ein Zinsertrag in Höhe von 102.500 EUR.

Verallgemeinert man das Beispiel auf n Jahre, so erhält man folgende Formel für den Zinsertrag:

$$ZE = K * \left(1 + \frac{Z}{100}\right)^n - K$$

GESAMTBANKSTEUERUNG

Die Zinseszinsrechnung

Dieser Zinseszinseffekt trifft immer auf, wenn die Zinsberechnungsperiode kürzer als die Anlageperiode ist.

Dies ist auch der Fall, wenn die Zinszahlung unterjährig erfolgt und die Anlageperiode mehrere Zinszahlungsperioden umfasst.

Wenn man all diese Parameter berücksichtigen will, so erhält man folgende Formel:

$$ZE = K * \prod_{i=1}^{m} \left(1 + \frac{Z_i}{100} * Jahresanteil_i \right) - K$$

Zinseszins – Ein Beispiel

GESAMTBANKSTEUERUNG

Was bedeutet nun diese Formel und wie rechnet man damit? Auch das sieht man am besten an einem Beispiel:

Es werden 1.000.000 EUR für 2 Jahre investiert und es werden 4 Zinszahlungen vereinbart, nach 1/3 Jahr, nach 2/3 Jahr nach 1 Jahr und 2 Jahren. Für die ersten drei Perioden wird ein Zinssatz von 3% vereinbart, für die letzte ein Zinssatz von 5%. Welcher Zinsertrag steht dem Investor am Ende der Laufzeit unter Berücksichtigung aller Zinseszinseffekte zur Verfügung?

Zinseszins – Ein Beispiel

Wir haben vier Zinszahlungen vereinbart, also ist in der Formel m=4 zu setzen.

Jahresanteil_1, Jahresanteil_2, und Jahresanteil_3 sind jeweils 1/3 und Jahresanteil_4 ist 1.

Als Letztes fehlen uns noch die Z_i um die Formel komplett befüllen zu können.
Für i=1,2,3 ist Z_i 3% und Z_4 ist 5%.

Zinseszins – Ein Beispiel

$$ZE = 1.000.000 * \left(\underbrace{\left(1 + \frac{3}{100} * \frac{1}{3}\right)}_{i=1} * \underbrace{\left(1 + \frac{3}{100} * \frac{1}{3}\right)}_{i=2} * \underbrace{\left(1 + \frac{3}{100} * \frac{1}{3}\right)}_{i=3} * \underbrace{\left(1 + \frac{5}{100} * \frac{1}{1}\right)}_{i=4} \right) - 1.000.000$$

$$\begin{aligned} ZE &= 1.000.000 * 1,08181605 - 1.000.000 \\ &= 1.081.816,05 - 1.000.000 \\ &= 81.816,05 \end{aligned}$$

Die stetige Verzinsung

GESAMTBANKSTEUERUNG

Als nächstes untersuchen wir einen Spezialfall der Zinseszinsrechnung. Was passiert, wenn wir genau ein Jahr betrachten und dieses in jeweils gleichgroße Abschnitte unterteilen und den Zinssatz konstant lassen?

Betrachten wir nochmals die Formel zur Zinseszinsberechnung:

$$ZE = K * \prod_{i=1}^{m} \left(1 + \frac{Z_i}{100} * Jahresanteil_i \right) - K$$

Die stetige Verzinsung

GESAMTBANKSTEUERUNG

Durch die Annahme von konstanten Zinsen Z und gleichlangen Anteilen eines Jahres m ergibt sich folgende Vereinfachung:

$$ZE = K * \left(1 + \frac{Z}{100} * \frac{1}{m}\right)^{m} - K$$

Werden die Perioden immer kürzer, dann muss m immer größer werden. Dies kann man beliebig fortsetzen, so dass m gegen unendlich geht (Schreibweise: $\lim_{m \to \infty}$). Es ergibt sich folgende Formel:

$$ZE + K = \lim_{m \to \infty} K * \left(1 + \frac{Z}{m * 100}\right)^{m} = K * \left(e^{1}\right)^{Z/100} = K * e^{Z/100}$$

Die stetige Verzinsung

Welche Vorteile hat die stetige Verzinsung?

Der wesentliche Vorteile ist, dass man sich keine Gedanken über die Zinskapitalisierung machen muss, da quasi jederzeit kapitalisiert wird.

Anwendung in wissenschaftlichen Untersuchung und Pricing Derivate

Agenda

GESAMTBANKSTEUERUNG

- Zinsrechnung
- Zinseszins
- Zeitwert des Geldes
- Strukturkongruente Refinanzierung
- Rendite
- Zinskurve

Der Zeitwert des Geldes

GESAMTBANKSTEUERUNG

Wie kann man die Vorteilhaftigkeit verschiedener Investitionen vergleichen?

Zahlungen zu verschiedenen Zeitpunkten können nicht direkt miteinander verglichen werden. Der Wert der Zahlungen muss für einen gemeinsamen Zeitpunkt berechnet werden.

Im Rahmen der Zinsrechnung haben wir berechnet, welche Zahlung wir nach n Jahren erhalten, wenn wir heute einen gewissen Betrag investieren.

Wir können die Fragestellung aber auch so formulieren, dass wir überlegen, welchen Wert z.B. 1.000 EUR, die wir in n Jahren haben, heute hätte.

Der Zeitwert des Geldes

GESAMTBANKSTEUERUNG

Noch einmal die Formel für die Zinseszinsrechnung:

$$\underbrace{K + ZE}_{FV_n} = \underbrace{K}_{PV} * \left(1 + \frac{Z}{100}\right)^n$$

Lösen wir die Formel nach PV auf, so erhalten wir:

$$PV = FV_n * \frac{1}{\left(1 + \frac{Z}{100}\right)^n}$$

Wollen wir in zwei Jahren 1.000 EUR erhalten und haben einen Zinssatz von 5% vereinbart, wieviel müssten wir heute investieren?

$$PV = FV_2 * \frac{1}{\left(1 + \frac{5}{100}\right)^2} = 1.000 * \frac{1}{1{,}1025} = 907{,}03\ EUR$$

Der Zeitwert des Geldes

Will man den Wert für eine unterjährige Zahlung ermitteln, geht man ebenso vor. Man überlegt, welchen Betrag wir heute anlegen müssen, um am Ende den gewünschten Betrag zu erhalten. Es ergibt sich folgende Formel:

$$PV = FV * \frac{1}{\left(1 + \frac{Z}{100} * Jahresanteil\right)}$$

Der Wert PV wird auch Barwert der Zahlung genannt, der Bruch als Diskontierungsfaktor DF_n.

Agenda

GESAMTBANKSTEUERUNG

- Zinsrechnung
- Zinseszins
- Zeitwert des Geldes
- Strukturkongruente Refinanzierung
- Rendite
- Zinskurve

Der Zeitwert des Geldes

Wir sind in den bisherigen Beispielen immer davon ausgegangen, dass es nur einen Zinssatz für alle Laufzeiten gibt bzw. das wir schon im voraus alle Zahlungen fest vereinbart haben.
Diese Annahme ist in der Praxis eher die Ausnahme als die Regel.

Der Zeitwert des Geldes

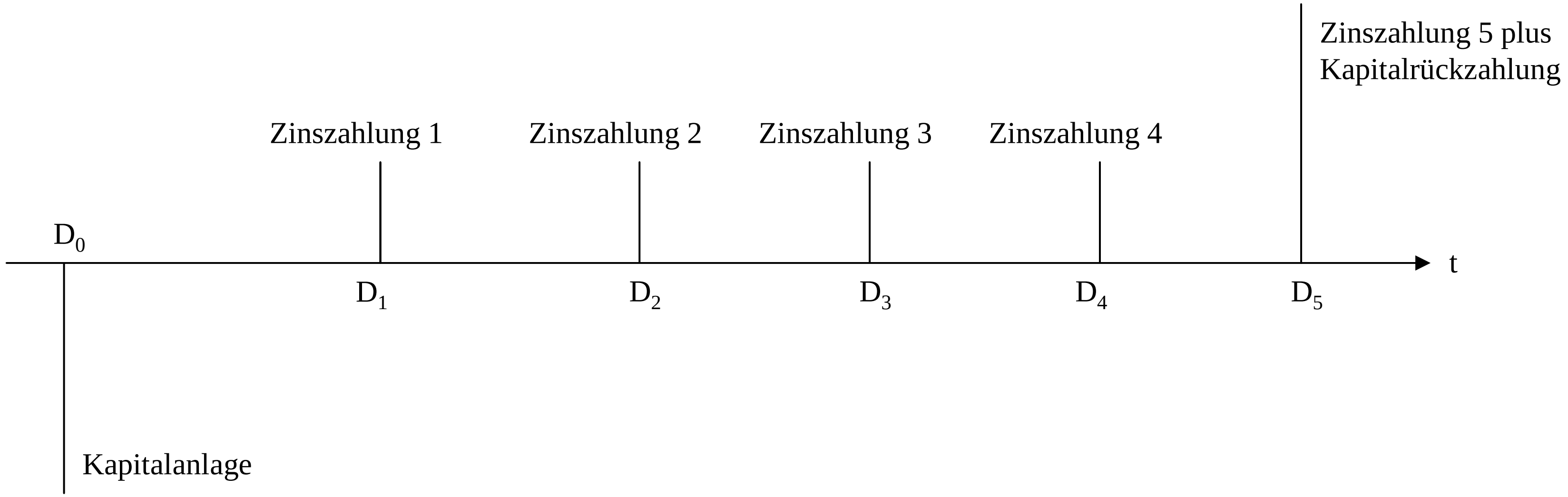
GESAMTBANKSTEUERUNG

Die meisten Zinsgeschäfte beinhalten eine feste Zinszahlung zu bestimmten Terminen und eine Rückzahlung des Kapitals. Diese Zahlungen werden Zahlungsstrom oder Cashflow des Geschäfts genannt.
Eine beliebte Darstellung sieht wie folgt aus:

Zahlungsströme

Beispiel:

Kauf eines Wertpapiers mit 5 Jahren Lautzeit, 4% Verzinsung, Nominal 100.000 €. Es ergibt sich folgender Cashflow:



Zahlungsströme

Welche Informationen kann man als Investor aus diesem Diagramm ableiten?
Zahlungen, die man selber leisten muss, werden unterhalb der Zeitachse t eingezeichnet. Auch die Höhe lässt sich ablesen.
Erhaltene Zahlungen finden sich dementsprechend oberhalb der Zeitachse.
Entlang der Zeitachse sind die Zeitpunkte der Zahlung abzulesen.

Der Barwert eines Zahlungsstroms

Bleiben wir bei unserem Beispiel des Wertpapiers. Aufgrund der Ausgestaltung sind die Werte für die Zeitpunkte D_1 bis D_5 festgeschrieben. Aber was ist mit D_0? Wie hoch darf die Zahlung aus Sicht des Investors höchstens sein, sprich wieviel ist das Geschäft eigentlich wert?
Um diese Frage beantworten zu können, kommen wir nun zum Konzept der strukturkongruenten Refinanzierung.
Um den Wert des Geschäfts beurteilen zu können, brauchen wir noch die aktuellen Zinssätze für die verschiedenen Laufzeiten: Im Beispiel sein dies:

1 Jahr 4,00%	2 Jahre 4,50%	3 Jahre 5,00%
4 Jahre 5,50%	5 Jahre 6,00%	

Der Barwert eines Zahlungsstroms

Zur Erinnerung nochmals den Zahlungsstrom:

	t(0)	t(1)	t(2)	t(3)	t(4)	t(5)
Zahlungsstrom		4.000 €	4.000 €	4.000 €	4.000 €	104.000 €

Bei der strukturkongruenten Refinanzierung, kurz SKR, beginnt man die zeitlich letzte Zahlung in t(5) mit einem Marktgeschäft auf Basis der Zinskurve zu schließen.
Wir berechnen, wieviel Geld heute aufgenommen werden muß, damit am Ende eine Zahlung in Höhe von 104 TEUR erfolgt.
Mit Hilfe unserer Formeln für die Zinsrechnung ergibt sich:

$$X = \frac{104.000\ EUR}{(1+6\%)} = \frac{104.000\ EUR}{1{,}06} = 98.113\ EUR$$

und ein Zinsaufwand von 5.887 EUR. Zusammengefaßt mit dem ursprünglichen Cashflow ergibt sich:

Der Barwert eines Zahlungsstroms

	t(0)	t(1)	t(2)	t(3)	t(4)	t(5)
Zahlungsstrom		4.000,00 €	4.000,00 €	4.000,00 €	4.000,00 €	104.000,00 €
Geschäft zu 6,0%	98.113,21 €	-5.886,79 €	-5.886,79 €	-5.886,79 €	-5.886,79 €	-104.000,00 €
Zwischenergebnis 1	98.113,21 €	-1.886,79 €	-1.886,79 €	-1.886,79 €	-1.886,79 €	0,00 €

Nun wird das gleiche Vorgehen für t(4) angewendet: Wir müssen auf eine Zahlung von -1.886,79 EUR bei einem Zinssatz von 5,5% kommen. Dies gelingt mit einer Anlage von 1.788 EUR.

	t(0)	t(1)	t(2)	t(3)	t(4)	t(5)
Zahlungsstrom		4.000,00 €	4.000,00 €	4.000,00 €	4.000,00 €	104.000,00 €
Geschäft zu 6,0%	98.113,21 €	-5.886,79 €	-5.886,79 €	-5.886,79 €	-5.886,79 €	-104.000,00 €
Zwischenergebnis 1	98.113,21 €	-1.886,79 €	-1.886,79 €	-1.886,79 €	-1.886,79 €	0,00 €
Geschäft zu 5,5%	-1.788,43 €	98,36 €	98,36 €	98,36 €	1.886,79 €	
Zwischenergebnis 2	96.324,78 €	-1.788,43 €	-1.788,43 €	-1.788,43 €	0,00 €	

Der Barwert eines Zahlungsstroms

Vervollständigt man die Vorgehensweise bis t(1), so fallen in t(1) bis t(5) keine Zahlungen mehr an. Was bleibt ist der Betrag in t(0), der den (Bar)Wert des Geschäftes darstellt. Das vollständige Schema für unser Beispiel sieht so aus:

	t(0)	t(1)	t(2)	t(3)	t(4)	t(5)
Zahlungsstrom		4.000,00 €	4.000,00 €	4.000,00 €	4.000,00 €	104.000,00 €
Geschäft zu 6,0%	98.113,21 €	-5.886,79 €	-5.886,79 €	-5.886,79 €	-5.886,79 €	-104.000,00 €
Zwischenergebnis 1	98.113,21 €	-1.886,79 €	-1.886,79 €	-1.886,79 €	-1.886,79 €	0,00 €
Geschäft zu 5,5%	-1.788,43 €	98,36 €	98,36 €	98,36 €	1.886,79 €	
Zwischenergebnis 2	96.324,78 €	-1.788,43 €	-1.788,43 €	-1.788,43 €	0,00 €	
Geschäft zu 5,0%	-1.703,27 €	85,16 €	85,16 €	1.788,43 €		
Zwischenergebnis 3	94.621,51 €	-1.703,27 €	-1.703,27 €	0,00 €		
Geschäft zu 4,5%	-1.629,92 €	73,35 €	1.703,27 €			
Zwischenergebnis 4	92.991,59 €	-1.629,92 €	0,00 €			
Geschäft zu 4,0%	-1.567,23 €	1.629,92 €				
Endergebnis	91.424,36 €	0,00 €				

Der Barwert des Geschäfts ist also rund 91.424 EUR.

Barwertberechnung mit Zerosätzen

Berechnet man mit der SKR die Kurse für die Zerobonds der verschiedenen Laufzeiten, so kann man anschließend mit deren Hilfe den Kurs des Wertpapiers auch einfacher berechnen.

Aufgrund der Zinsstruktur ergeben sich folgende Kurse für die Zerobonds:
5-Jahre: 74,27%
4-Jahre: 80,50%
3-Jahre: 86,30%
2-Jahre: 91,55%
1-Jahr: 96,15%

Der Barwert eines Zahlungsstroms

GESAMTBANKSTEUERUNG

Anschließend kann man jeden einzelnen Cashflow mit den entsprechenden Kursen multiplizieren und erhält so ebenfalls den Barwert des Geschäfts

	t(0)	t(1)	t(2)	t(3)	t(4)	t(5)
Zahlungsstrom		4.000,00 €	4.000,00 €	4.000,00 €	4.000,00 €	104.000,00 €
Zero-Kurs		0,96153846	0,91553184	0,86299665	0,80502021	0,74273092
Barwert		3.846,15 €	3.662,13 €	3.451,99 €	3.220,08 €	77.244,02 €
Summe	91.424,36 €					

Agenda

GESAMTBANKSTEUERUNG

- Zinsrechnung
- Zinseszins
- Zeitwert des Geldes
- Strukturkongruente Refinanzierung
- Rendite
- Zinskurve

Der Barwert eines Zahlungsstroms

GESAMTBANKSTEUERUNG

Setzt man den Barwert in Relation zum Nominalwert, so erhält man den Kurswert, in diesem Fall 91,42%.
Bewertet man nun den gleichen Cashflow, d.h. in unserem Beispiel 4% Zins, 5 Jahre Laufzeit, jeden Monat neu mit der dann aktuellen Zinskurve, so erhält man die Kurshistorie für dieses Papier. Das sieht dann ungefähr wie folgt aus:

31.12.1993	109,36
31.01.1994	108,92
28.02.1994	106,1
31.03.1994	105,77
30.04.1994	104,53
31.05.1994	103,44

Rendite

Anhand dieser Zeitreihe wollen wir einen weiteren Begriff einführen: die Rendite
man unterscheidet hierbei zwischen diskreter und stetiger Rendite.
Die diskrete Rendite berechnet sich als prozentualer Zuwachs von einem Zeitpunkt zum nächsten:

$$R_{s,t} = \frac{(S_t - S_s)}{S_s} = \frac{S_t}{S_s} - 1$$

wobei S_t und S_s die Kurse zum Zeitpunkt s und t sind.

Rendite

Die stetige Rendite ergibt sich als natürlicher Logarithmus des Zuwachsverhältnisses:

$$r_{s,t} = \ln \frac{S_t}{S_s} = \ln S_t - \ln S_s$$

Ein kleines Beispiel für die Vorteile der stetigen Rendite:
In t_0 beträgt der Kurs 100, in t_1 140, in t_2 wieder 100.
Bei der diskreten Rendite erhalten wir R_1=40% und R_2=-28,6%, in Summe also +11,4%
Für die stetige Rendite erhalten wir r_1=33,6 und r_2=-33,6 in Summe also 0%.

Rendite

Als Gleichgewichtspreis eines Wertpapiers resultiert ein Preis, bei dem der Wert der abdiskontierten Zahlungen gleich dem aktuellen Kurs des Wertpapiers ist. Es muss also gelten:

$$P = \frac{c}{(1+y/100)} + \frac{c}{(1+y/100)^2} + \cdots + \frac{c}{(1+y/100)^t} + \frac{RZ}{(1+y/100)^t}$$

$$P = \sum_{i=1}^{t} \frac{c}{(1+y/100)^i} + \frac{RZ}{(1+y/100)^t} \quad oder \quad P = \sum_{i=1}^{t} \frac{CF_i}{(1+y/100)^i}$$

Alle zukünftigen Zahlungen werden mit Hilfe des Zinssatzes y abdiskontiert. Dieser Zinssatz wird auch als Rendite oder yield to maturity bezeichnet.

Agenda

GESAMTBANKSTEUERUNG

- Zinsrechnung
- Zinseszins
- Zeitwert des Geldes
- Strukturkongruente Refinanzierung
- Rendite
- Zinskurve

Die Zinskurve und ihre Informationen

GESAMTBANKSTEUERUNG

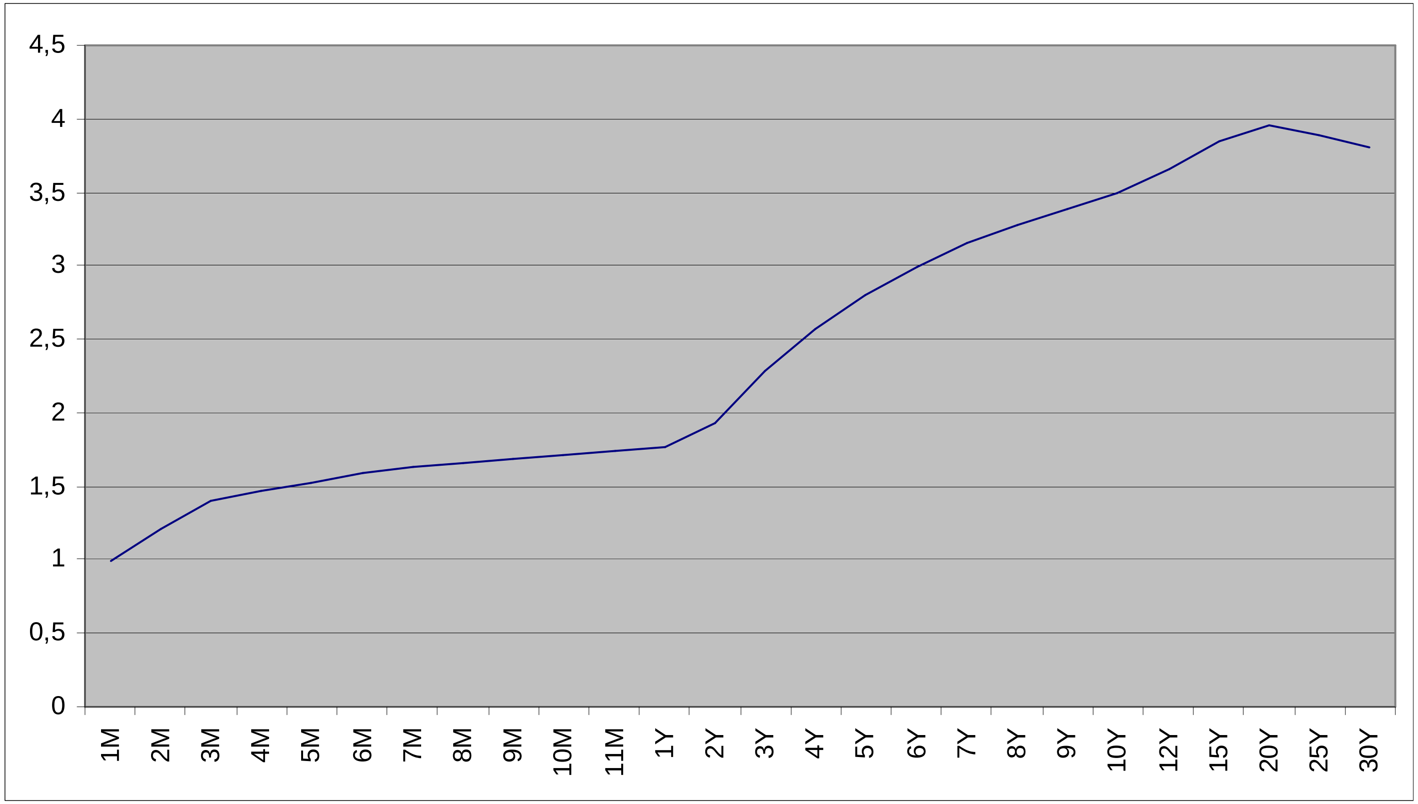
GESAMTBANKSTEUERUNG

Wir haben somit eine Darstellung, wie der Markt die Zinssätze im Moment handelt.
Aber die Zinskurve enthält darüber hinaus auch noch Informationen über zukünftige Zinssätze. Die derart abgeleiteten Zinssätze werden Forwards genannt.
Wie diese ermittelt werden untersuchen wir im folgenden anhand eines Beispiels:
Wir betrachten einen Investor, der Geld für 4 Jahre anlegen will. Als Möglichkeiten stehen ihm zur Verfügung:

1. Anlage für 4 Jahre zu 5,15%
2. Anlage für 3 Jahre zu 4,65%, kombiniert mit einer Geldanlage für das verbleibende Jahr zu X%

Die Zinskurve und ihre Informationen

Unter einer Zinskurve versteht man die graphische Darstellung von Zinssätzen für verschiedene Laufzeiten.



Die Zinskurve und ihre Informationen

Wie hoch muss der Zins X sein, damit beide Anlagen den gleichen Ertrag bringen?

$$K * \left(1 + \frac{5{,}15}{100}\right)^4 = K * \left(1 + \frac{4{,}65}{100}\right)^3 * \left(1 + \frac{X}{100}\right)^{(4-3)}$$

Löst man die Gleichung nach X auf, so ergibt sich:

$$\frac{X}{100} = \sqrt[4-3]{\frac{\left(1 + \frac{5{,}15}{100}\right)^4}{\left(1 + \frac{4{,}65}{100}\right)^3}} - 1 = 0{,}06667 \approx 6{,}67\%$$

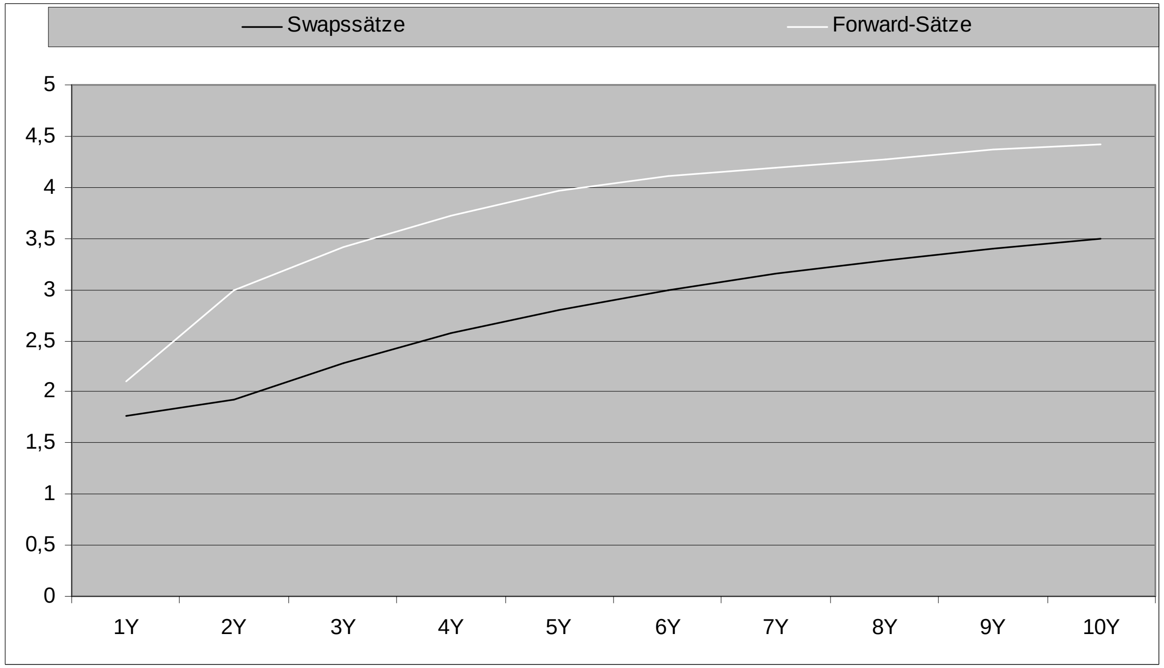
In diesem Fall beträgt der Forwardsatz in 3 Jahren für 1 Jahr also 6,67%.

Die Zinskurve und ihre Informationen

GESAMTBANKSTEUERUNG

Die Gleichung lässt sich wie folgt verallgemeinern:

$$\frac{Z_{i,j}}{100} = \sqrt[n_j - n_i]{\frac{\left(1+\frac{Z_j}{100}\right)^{n_j}}{\left(1+\frac{Z_i}{100}\right)^{n_i}}} - 1$$



Die verschiedenen Märkte

Bisher haben wir als mögliche Geschäfte nur die Zinsgeschäfte betrachtet.
Weitere Anlagemöglichkeiten sind:

-Aktien
-Währungen
-Rohstoffe

Aktienrendite

GESAMTBANKSTEUERUNG
GESAMTBANKSTEUERUNG

Die Gesamtrendite oder Performance einer Aktienanlage ergibt sich aus der Wertänderung zwischen Anlage und Verkauf plus ausgeschütteter Dividenden:

S_t Aktienkurs zum Zeitpunkt t

S_s Aktienkurs zum Zeitpunkt s

Div_i Dividende zum Zeitpunkt i

Dann ergibt sich die Gesamtrendite als:

$$r_{s,t} = \ln \frac{S_t + \sum_i Div_i}{S_s}$$

Aktienrendite

Die Gesamtrendite bei Anlagen in Währungen und Rohstoffen ergibt sich aus der Differenz des Einkaufs- und Verkaufskurses:

$$r_{s,t} = \ln \frac{S_t}{S_s} = \ln S_t - \ln S_s$$